# Operadores tensoriales de concomitancia

Schifini, Claudio Gabriel

1984

Tesis Doctoral

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Tema de Tesis

# OPERADORES TENSORIALES DE CONCOMITANCIA

Autor

LIC. CLAUDIO GABRIEL SCHIFINI

Director de Tesis

DR. RICARDO J. NORIEGA

Lugar de Trabajo

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL TITULO DE DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS

-1984-

## AGRADECIMIENTOS

- Al Dr.Ricardo J.Noriega, por su invalorable ayuda intelectual y espiritual.
- A mi mujer, por su constante e incondicional soporte.
- A mis hijos, por su inconsciente estímulo.
- A mis padres y hermanos.
- A la Sra.Silvia C.López, quien con gran dedicación y capacidad profesional realizó la mecanografía.
- Al Sr.Julio A.Corvalán.
- Al Departamento de Matemática que me brindó el lugar de trabajo indispensable para la realización de esta tesis.
- A los amigos y compañeros que me ayudaron y alentaron en estos años de trabajo.

# INDICE

# INTRODUCCION

En el presente trabajo se han perseguido los siguientes dos objetivos: por un lado, encontrar una formulación adecuada de la clásica teoría de concomitantes introduciendo la noción de operador de concomitancia. Por otro lado, lograr nuevos resultados en esta teoría y usarlos para obtener aplicaciones a la física-matemática; más precisamente para, mediante el uso de principios variacionales, deducir ciertas ecuaciones de campo de la física teórica.

La noción intuitiva de los concomitantes tensoriales es sencilla de explicar en los casos elementales. Por ejemplo, si en una variedad diferenciable $M^n$ tenemos un campo vectorial X y una 1-forma w, para cada carta local (x,U) de M será:

$$X = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{y} \quad w = \sum_{i=1}^{n} b_i \, dx^i \quad , \text{ en } U$$

Podemos considerar entonces la función $L_U : U \to \mathbb{R}$ dada por:

$$L_U(p) = \sum_{i=1}^{n} a^i(p)\, b_i(p) \quad , \quad \forall\, p \in U$$

Es facil de verificar que si $(\tilde{x},\tilde{U})$ es otra carta local en M con $U \cap \tilde{U} \neq \phi$ entonces $L_U/_{U\cap\tilde{U}} = L_{\tilde{U}}/_{U\cap\tilde{U}}$, con lo cual tenemos definido un "escalar" sobre M, es decir una función $L: M \to \mathbb{R}$ por $L/_U = L_U$. Decimos que este escalar es concomitante del campo X y de la 1-forma w sii existe una función $F: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ (operador escalar de concomitancia) tal que para cada carta local (x,U) de M es:

$$L(p) = F(a^1(p),\dots,a^n(p),\, b_1(p),\dots,b_n(p)) \quad , \ \forall\, p \in U$$

En este caso la función F está dada por:

$$F(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

y es importante notar que la función F está definida independientemente de las cartas Locales de la variedad.

Un ejemplo clásico de concomitante es la conexión de Levi-Civita de un espacio pseudo-Riemanniano. Si G es una pseudo-métrica sobre una variedad M, para cada **carta** local (x,U) de M será:

$$G = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\ dx^i \otimes dx^j$$

Podemos formar entonces los símbolos de Christoffel $\Gamma^i_{jk}: U \to \mathbb{R}$ como:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} g^{is}(g_{js,k} + g_{ks,j} - g_{jk,s})$$

donde, por definición, $g_{js,k} = \partial g_{js}/\partial x^k$. Es sabido que las $n^3$ funciones $\Gamma^i_{jk}$ así definidas son componentes de una conexión, la llamada conexión de Levi-Civita. Es claro que la forma en que $\Gamma^i_{jk}$ depende de los $g_{ij}$ y de sus derivadas parciales es la misma cualquiera sea la carta local de la variedad, así que nuevamente tenemos la noción de concomitante. La función F correspondiente es en este caso mucho más complicada de escribir pero se ve que sus "variables" son los coeficientes $g_{ij}$ y sus derivadas parciales. Esta aparición de las derivadas parciales es lo que hace natural trabajar en la teoría de jets para obtener una formalización adecuada.

En la Sección 1 se recuerdan los conceptos elementales de la teoría de jets que serán necesarios en las subsiguientes secciones.

En la Sección 2 se definen los operadores tensoriales de concomitancia. La idea básica es que la noción de concomitante se reduce a la existencia de una cierta función $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que si se reemplazan las variables de F por componentes de tensores de un tipo fijo y sus derivadas parciales, entonces lo que resulta son componentes tensoriales de un tipo fijo (Definición 2.6). A continuación se definen las identidades de invariancia [15] que resultan ser herramientas fundamentales para la determinación de los concomitantes.

En la Sección 3 se aplica la formalización indicada para obtener teoremas particulares sobre escalares concomitantes. Se obtienen en esta sección la forma general de: Los escalares concomitantes de un campo vectorial y una 1-forma (Teorema 3.3), los escalares concomitantes de un tensor pseudométrico y de un campo vectorial (Teorema 3.5), los escalares concomitantes de un tensor pseudométrico, de un escalar y de sus primeras derivadas (Teorema 3.7), los escalares concomitantes de un tensor pseudométrico y un tensor antisimétrico no singular (Teorema 3.9), y los escalares concomitantes de un tensor pseudométrico y una 1-forma (Teorema 3.11).

En la Sección 4, una vez asentada la formalización de la teoría, se recupera la notación clásica y se encuentran los tensores de tipo (r,s) para $r + s \leq 4$ concomitantes de un tensor pseudométrico y una 1-forma (Teoremas 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5).

La Sección 5, última sección, está dedicada a la aplicación a la física-matemática de algunos de los resultados anteriores. Una de las aplicaciones, no incluida aquí ya que pertenece a otro autor [2], consiste, a partir del Teorema 4.5, en encontrar todos los Lagrangianos concomitantes de un tensor métrico, una 1-forma y sus derivadas parciales hasta cualquier orden, compatibles con las unidades físicas en cuestión (de longitud, de tiempo, de carga, etc.)[1]. Las aplicaciones incluidas son dos y en ambas se demuestra que la elección habitual del tensor momento-energía da lugar a las ecuaciones de Maxwell en la teoría de Einstein-Maxwell (Teorema 5.2) y a la ecuación de Klein-Gordon en el correspondiente caso (Teorema 5.3).

Con la intención de que este trabajo sea autocontenido para una persona con nociones básicas de geometría diferencial, se desarrolla en la Sección 6 (Apéndice I) la teoría de k-jets bosquejada en la Sección 1.

Por último, se han relegado a la Sección 7 (Apéndice II) el análisis de ciertos aspectos de la teoría de k-jets en el caso particular en que el contexto sea el de la Sección 2, así como parte de la demostración del Lema 2.2 de esa sección.

# 1. PRELIMINARES

Sean M y P variedades diferenciables de dimensiones m y m+n respectivamente, y sea $\pi: P \to M$ una submersión suryectiva (o sea, una aplicación $C^\infty$ suryectiva tal que su diferencial $\pi_{*p}: P_p \to M_{\pi(p)}$ es epimorfismo $\forall\ p \in P$).

Una *sección local* de $\pi$ es una aplicación $s: U \to P$, donde U es un abierto de M, tal que $\pi \circ s = id$. Notaremos con $\Gamma(U,P)$ al conjunto de todas las secciones locales $C^\infty$ de $\pi$ con dominio U.

Dado $k \in N_o$, dos secciones locales $C^\infty$ de $\pi$, $s_1 \in \Gamma(U_1,P)$ y $s_2 \in \Gamma(U_2,P)$, se dice que están (para $x_o \in U_1 \cap U_2$) *$k,x_o$-relacionadas* ($s_1 \underset{k,x_o}{\sim} s_2$) sii, en cartas locales, las derivadas parciales hasta el orden k de $s_1$ y $s_2$ coinciden en $x_o$.

Se define $P^k(x)$ como el cociente, por esta relación de equivalencia, del conjunto de todas las secciones $C^\infty$ de $\pi$ con dominio algún entorno abierto de x, para cada $x \in M$; y $P^k$ como la unión de todos los $P^k(x)$ para $x \in M$.

Se define la proyección $\pi^k: P^k \to M$ de la manera natural: $\pi^k(y) = x$ sii $y \in P^k(x)$.

Para $s \in \Gamma(U,P)$ se define el *k-jet* de s a la aplicación $j^k(s): U \to P^k$ dada por: $j^k(s)(x) = \bar{s}^{k,x}$ = clase de equivalencia de s por la relación $\underset{k,x}{\sim}$ definida antes.

Para k y $\ell \in N_o$, con $k \geq \ell$, se define la *proyección canónica* de los k-jets sobre los $\ell$-jets como la aplicación

$\pi^k_\ell : P^k \to P^\ell$ dada por $\pi^k_\ell(j^k(s)(x)) = j^\ell(s)(x)$.

Es facil ver que $P^\circ \simeq P$ y por lo tanto se identifican.

Una *carta de coordenadas adaptada para* $P$ es una terna $(U, \varphi_o, \varphi)$, donde $U$ es abierto de $P$ y $\varphi_o : \pi(U) \to R^m$ y $\varphi : U \to R^m \times R^n$ son difeomorfismos que conmutan el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & R^m \times R^n \arrow[d, "P_1"] \\ \pi(U) \arrow[r, "\varphi_o"] & R^m \end{tikzcd}$$

donde $P_1$ es la proyección sobre el primer factor.

Para cada carta adaptada $(U, \varphi_o, \varphi)$, sean:

$$V_U = (\pi_o^k)^{-1}(U)$$

y (1.1)

$$h = m + n + n \sum_{i=1}^{k} c'_{m,i}$$

donde $c'_{m,i}$ indica las combinaciones con repetición de m elementos tomados de a i.

Si $y \in V_U$, entonces existe W entorno abierto de $\pi^k(y)$ en M y $s \in \Gamma(W,U) \,/\, y = j^k(s)(\pi^k(y))$. Se definen entonces:

$$s^i = \varphi^i \circ s \circ \varphi_o^{-1} \qquad (\forall\ 1 \leq i \leq n)$$

y

$$s^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_t} = D_{\alpha_1 \ldots \alpha_t}(s^i), \qquad (\forall\ 1 \leq t \leq k,\ 1 \leq \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_t \leq m)$$

donde $\varphi^i$ indica la coordenada m+i de la función $\varphi$ (notamos $\varphi = ({}^1\varphi, \ldots, {}^m\varphi, \varphi^1, \ldots, \varphi^n))$.

Definimos entonces:

$$\phi^k : V_U \to R^h \text{ por:}$$

$$\phi^k(y) = (\varphi_o(x),\ s^i(\varphi_o(x)), \ldots, s^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(\varphi_o(x))),$$

donde $x = \pi^k(y)$.

La familia de todos los $(V_U, \phi^k)$ le dan a $P^k$ una estructura de variedad diferenciable de dimensión h, dado por (1.1), con la cual $\{(V_U, \phi^k)\}$ resulta ser un atlas $C^\infty$ para $P^k$.

# 2. Operadores Tensoriales de Concomitancia

## 2.1. Introducción

Sea M una variedad diferenciable de dimensión m y, para un número natural c y enteros no negativos $r_1, s_1, \ldots, r_c, s_c$, sea:

$$P = \bigcup_{p\in M} (T^{r_1}_{s_1}(M_p) \times \ldots \times T^{r_c}_{s_c}(M_p)) \ , \qquad (2.1)$$

donde $T^r_s(M_p)$ es el producto tensorial de $M_p$ (r veces) y $M_p^*$ (s veces). Sea:

$$\pi : P \to M \text{ dada por:}$$

$$\pi(S_1, \ldots, S_c) = p \qquad \text{sii} \quad S_j \in T^{r_j}_{s_j}(M_p), \ \forall\, 1 \leqslant j \leqslant c$$

Sea:

$$n = \sum_{j=1}^{c} m^{(r_j + s_j)} \qquad (2.2)$$

Para cada carta local (x,U) de M consideramos el conjunto $\pi^{-1}(U)$. Luego:

$S \in \pi^{-1}(U) \Leftrightarrow \exists p \in U \ / \ S \in T^{r_1}_{s_1}(M_p) \times \ldots \times T^{r_c}_{s_c}(M_p) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\, p \in U \ / \ S = (S_1, .., S_c)$ con $S_j \in T^{r_j}_{s_j}(M_p)$, $\forall\, 1 \leqslant j \leqslant c$. Por lo tanto, para $1 \leqslant j \leqslant c$, será :

$$S_j = a^{i_1 \ldots i_{r_j}}_{(j) h_1 \ldots h_{s_j}} \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)_p \otimes \ldots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_{r_j}}}\right)_p \otimes (dx^{h_1})_p \otimes \ldots \otimes (dx^{h_{s_j}})_p$$

Definimos entonces:

$$t_U : \pi^{-1}(U) \to x(U) \times \mathbb{R}^n \quad \text{por}$$

$$t_U(S) = (x(p), a^{i_1 \ldots i_{r_1}}_{(1) h_1 \ldots h_{s_1}}, \ \ldots \ , a^{i_1 \ldots i_{r_c}}_{(c) h_1 \ldots h_{s_c}})$$

Como en el caso del fibrado tangente, TM, es fácil ver que las aplicaciones $t_U$ determinan sobre P una estructura de variedad diferenciable de dimensión m+n, donde n esta dado por (2.2), con la cual la familia $\{(t_U, \pi^{-1}(U))\}$ resulta un atlas $C^\infty$ de P. Es fácil ver también que, con esta estructura diferenciable, $\pi$ resulta una submersión suryectiva. Por lo tanto (Ver Sección 1) podemos considerar, para cada $k \in \mathbb{N}_o$, el espacio de los k-jets, $P^k$, correspondiente a la variedad P definida en (2.1).

Si $a = \{(x,U)\}$ es un atlas $C^\infty$ de M con $x(U) = \mathbb{R}^m$, se obtiene a partir de $a$ un atlas $C^\infty$ $a' = \{(t_U, \pi^{-1}(U))\}$ de P con la propiedad de que $t_U(\pi^{-1}(U)) = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Luego el atlas $a$ nos proporciona una familia de cartas adaptadas para P, $\{(\pi^{-1}(U), t_U, x)\}$ cuyos dominios cubren P. De aquí, usando los resultados de la Sección 6, obtenemos, para cada k entero no negativo, un atlas $C^\infty$ $a^k = \{(\phi^k, V_{\pi_k^{-1}(U)})\}$ de $P^k$ tal que $\phi^k(V_{\pi^{-1}(U)}) = \mathbb{R}^h$, donde $V_{\pi^{-1}(U)}$ y $h(=\dim P^k)$ están dados por (1.1) y n está dado por (2.2).

Consideremos ahora un elemento p de M fijo y una carta local (x,U) de M alrededor de p tal que $x(U) = \mathbb{R}^m$. Sea $k \in \mathbb{N}_o$

Para cada carta $(\tilde{x},U)$ de M con $\tilde{x}(U) = \mathbb{R}^m$ definimos:

$$\psi_p^k(\tilde{x}) : \mathbb{R}^{h-m} \to \mathbb{R}^h \text{ la aplicación } (C^\infty) \text{ dada por:}$$

$$\psi_p^k(\tilde{x})\ (b^i, b^i_\alpha, \ldots, b^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}) = \tilde{\phi}^k \circ (\phi^k)^{-1}(x(p), b^i, b^i_\alpha, \ldots, b^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}),$$

donde $1 \leq i \leq n$ (n el dado en (2.2)) y $1 \leq \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_t \leq m$, $1 \leq t \leq k$.

Sea $A$ el conjunto de todas las funciones $\psi_p^k(\tilde{x})$ para cartas locales de $M(\tilde{x},U)$ con $\tilde{x}(U) = \mathbb{R}^m$.

2.2. <u>Lema</u>

*$A$ es biyectivo a $GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q$.*

donde $GL(m,\mathbb{R})$ indica el conjunto de matrices inversibles de $\mathbb{R}^{m\times m}$ y $q = \dim(M \times M)^{k+1} - 2m - m^2$ (donde $(M \times M)^{k+1}$ es el espacio de los (k+1)-jets correspondiente a la variedad MxM con la proyección natural sobre el primer factor).

Dem.:

Sea:

$$f:A \rightarrow GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q$$

dada por:

$$f(\psi_p^k(\tilde{x})) = (B_j^i(p),\ B_{j_1j_2}^i(p),\dots,B_{j_1\dots j_{k+1}}^i(p)), \tag{2.3}$$

donde

$$B_{j_1\dots j_s}^i = \frac{\partial^s x^i}{\partial \tilde{x}^{j_1}\dots\partial \tilde{x}^{j_s}}$$

$\forall\ 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_s \leq m,\ \forall\ 1 \leq s \leq k+1.$

No es claro, en principio, que f esté bien definida. Sin embargo esto es verdadero y su demostración, por lo engorroso de su notación ha sido relegada al Apéndice II- Sección 7.

Por el contrario, como $x \circ \tilde{x}^{-1}$ es una aplicación inversible, es claro que $B_j^i(p) \in GL(m,\mathbb{R})$ y por lo tanto, efectivamente, $f(A) \subset GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q$.

Para probar el lema definimos:

$$g:GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q \rightarrow A$$

de la siguiente manera:

Dado $(C_j^i, C_{j_1j_2}^i,\dots,C_{j_1\dots j_{k+1}}^i) \in GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q$, sea $(\tilde{x},U)$ una carta de M con $\tilde{x}(U) = \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\begin{cases} \tilde{x}(p) = x(p) \\ B_j^i(p) = C_j^i \\ B_{j_1\dots j_t}^i(p) = C_{j_1\dots j_t}^i \qquad \forall\ 2 \leq t \leq k+1 \end{cases}$$

Es claro que una tal carta siempre existe (bastaría, por ejemplo, componer x con el polinomio de grado $\leq$ k+1 cuyos coeficientes son los $c^i_{j_1 \ldots j_t}$).

Definimos entonces:

$$g(c^i_j, c^i_{j_1 j_2}, \ldots, c^i_{j_1 \ldots j_{k+1}}) = \psi^k_p(\tilde{x}) \qquad (2.4)$$

Como antes, y por la misma razón, también relegamos la demostración de la buena definición de g al Apéndice II- Sección 7.

De la definición de g se desprenden automáticamente las igualdades:

$$g \circ f = id \;, \qquad f \circ g = id \qquad ,$$

de donde $g = f^{-1}$ y por lo tanto f es biyectiva. ///.

## 2.3. Definiciones

En particular podemos considerar $M = \mathbb{R}^m$, para algún m natural, p=0 y $(x,U) = (id, \mathbb{R}^m)$, la carta usual de $\mathbb{R}^m$.

Cada elemento de A, definido en 2.1, es una aplicación (diferenciable) de $\mathbb{R}^{h-m}$ en $\mathbb{R}^h$. El lema 2.2 nos permite, por lo tanto, definir una acción para cada $k \in \mathbb{N}_o$. Sea:

$$H^k: GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{h-m} \to \mathbb{R}^{h-m} \text{ dada por:}$$

$$H^k(B,b) = \pi'(f^{-1}(B)(b)), \qquad (2.5)$$

$\forall\, B \in GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q$, $\forall\, b \in \mathbb{R}^{h-m}$; donde $f^{-1}$ es la aplicación dada en (2.4) y $\pi': \mathbb{R}^h \to \mathbb{R}^{h-m}$ es la proyección sobre las últimas h-m coordenadas de $\mathbb{R}^h$.

Diremos que un abierto V de $\mathbb{R}^{h-m}$ es *invariante* por $H^k$ sii

$$H^k(GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q \times V) \subset V$$

## 2.4. Observaciones

La acción $H^k$ definida por (2.5) será de fundamental importancia en nuestra futura definición de operador tensorial de concomitancia. Por esta razón es necesario el perfecto entendimiento de su comportamiento. En las siguientes lineas es nuestra meta lograr ese cometido.

Cada elemento $C \in GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q$ es de la forma:

$$C = (C^i_j, C^i_{j_1 j_2}, \ldots, C^i_{j_1 \ldots j_{k+1}}),$$

donde, por supuesto, $1 \leq i,\ j \leq m$ y $1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_s \leq m$ para todo $1 \leq s \leq k+1$.

Dado C vimos en 2.2 que existe una carta $(\tilde{x}, \mathbb{R}^m)$ tal que:

$$(1) \qquad B^i_{j_1 \ldots j_s}(0) = C^i_{j_1 \ldots j_s} \quad , \ \forall\ 1 \leq s \leq k+1$$

donde $B^i_{j_1 \ldots j_s} = \partial^s x^i / \partial \tilde{x}^{j_1} \ldots \partial \tilde{x}^{j_s}$. Quedan definidos por lo tanto:

$$A^i_{j_1 \ldots j_s} = \frac{\partial^s \tilde{x}^i}{\partial x^{j_1} \ldots \partial x^{j_s}}$$

Definimos entonces un elemento $D = (D^i_j, D^i_{j_1 j_2}, \ldots, D^i_{j_1 \ldots j_{k+1}})$ de $GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q$ por:

$$(2) \qquad D^i_{j_1 \ldots j_s} = A^i_{j_1 \ldots j_s}(0) \qquad , \qquad \forall\ 1 \leq s \leq k+1$$

Es facil ver de aquí que:

$$(3)\quad \begin{cases} D^i_j = ((C^r_s)^{-1})^i_j \\ D^i_{j_1 j_2} = -D^i_j\, D^{\ell_1}_{j_1}\, D^{\ell_2}_{j_2}\, C^j_{\ell_1 \ell_2} \\ D^i_{j_1 j_2 j_3} = -\{[D^i_{jj_3} D^{\ell_1}_{j_1} D^{\ell_2}_{j_2} + D^i_j D^{\ell_1}_{j_1 j_3} D^{\ell_2}_{j_2} + D^i_j D^{\ell_1}_{j_1} D^{\ell_2}_{j_2 j_3}]\, C^j_{\ell_1 \ell_2} \\ \qquad + D^i_j\, D^{\ell_1}_{j_1}\, D^{\ell_2}_{j_2}\, D^{\ell_3}_{j_3}\, C^j_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}\} \\ \vdots \end{cases}$$

donde en general, inductivamente, los siguientes $D^i_{j_1 \ldots j_s}$ se obtienen de la igualdad:

$$D^i_{j_1 \ldots j_s} = A^i_{j_1 \ldots j_s}(0) = \frac{\partial}{\partial x^{j_s}} (A^i_{j_1 \ldots j_{s-1}})(0)$$

reemplazando luego por las igualdades (1) y (2).

Ahora bien, cada elemento $b \in \mathbb{R}^{h-m}$ puede ser pensado en la forma:

$$b = (b^{i_1 \ldots i_{r_\ell}}_{(\ell) j_1 \ldots j_{s_\ell}}\ ,\ b^{i_1 \ldots i_{r_\ell}}_{(\ell) j_1 \ldots j_{s_\ell} \alpha}, \ldots, b^{i_1 \ldots i_{r_\ell}}_{(\ell) j_1 \ldots j_{s_\ell} \alpha_1 \ldots \alpha_k})$$

Luego será:

$$H^k(C,b) = \pi'(f^{-1}(C)(b)) = \pi'(\psi^k_o(\tilde{x})(b)) = \pi'((\tilde{\phi}^k \circ (\phi^k)^{-1})(0,b)).$$
$$(2.5)$$

Teniendo en cuenta el Apéndice II-Sección 7 y las igualdades (3) resulta que:

$$H^k(C,b) = (\tilde{b}^{h_1 \ldots h_{r_\ell}}_{(\ell) t_1 \ldots t_{s_\ell}}\ ,\ \tilde{b}^{h_1 \ldots h_{r_\ell}}_{(\ell) t_1 \ldots t_{s_\ell} \beta}, \ldots, \tilde{b}^{h_1 \ldots h_{r_\ell}}_{(\ell) t_1 \ldots t_{s_\ell} \beta_1 \ldots \beta_k})$$

donde:

$$\tilde{b}^{h_1 \ldots h_{r_\ell}}_{(\ell) t_1 \ldots t_{s_\ell}} = D^{h_1}_{i_1} \ldots D^{h_{r_\ell}}_{i_{r_\ell}}\, C^{j_1}_{t_1} \ldots C^{j_{s_\ell}}_{t_{s_\ell}}\, b^{i_1 \ldots i_{r_\ell}}_{(\ell) j_1 \ldots j_{s_\ell}}$$

$$\tilde{b}^{h_1\ldots h_{r_\ell}}_{(\ell)t_1\ldots t_{s_\ell}\beta} = \{[D^{h_1}_{i_1 j}\, D^{h_2}_{i_2} \ldots D^{h_{r_\ell}}_{i_{r_\ell}} + \ldots + D^{h_1}_{i_1} \ldots D^{h_{r_\ell}}_{i_{r_\ell} j}]\, C^{j_1}_{t_1} \ldots C^{j_{s_\ell}}_{t_{s_\ell}} C^{j}_{\beta} +$$

$$+ [C^{j_1}_{t_1\beta}\, C^{j_2}_{t_2} \ldots C^{j_{s_\ell}}_{t_{s_\ell}} + \ldots + C^{j_1}_{t_1} \ldots C^{j_{s_\ell}}_{t_{s_\ell}\beta}]\, D^{h_1}_{i_1} \ldots D^{h_{r_\ell}}_{i_{r_\ell}}\}\, b^{i_1\ldots i_{r_\ell}}_{(\ell)j_1\ldots j_{s_\ell}} +$$

$$+ D^{h_1}_{i_1} \ldots D^{h_{r_\ell}}_{i_{r_\ell}}\, C^{j_1}_{t_1} \ldots C^{j_{s_\ell}}_{t_{s_\ell}}\, C^{\alpha}_{\beta}\, b^{i_1\ldots i_{r_\ell}}_{(\ell)j_1\ldots j_{s_\ell}\alpha}$$

y en general las expresiones de las siguientes componentes se consiguen considerando para cada $\ell$ a $b^{i_1\ldots i_{r_\ell}}_{(\ell)j_1\ldots j_{s_\ell}}$ como las coordenadas, en el punto 0, de un tensor de tipo $(r_\ell, s_\ell)$ en la carta $(id, \mathbb{R}^m)$ y calculando formalmente los cambios de coordenadas a la carta $(\tilde{x}, \mathbb{R}^m)$ del tensor y sus derivadas hasta el orden k, y reemplazando luego por las igualdades (1) y (2).

Es claro entonces que $H^k$ resulta ser una función diferenciable.

Estamos ahora en condiciones de dar nuestra definición de operador tensorial de concomitancia. Damos primero una definición auxiliar.

## 2.5. Definición

Sean $m,r,s,w,k \in \mathbb{N}_o$ y sea V un abierto de $\mathbb{R}^{h-m}$ (h el dado por (1.1)).

Dada $F: V \subset \mathbb{R}^{h-m} \to \mathbb{R}^{m^{(r+s)}}$ se define la *aplicación asociada* a F a la función:

$$A(F):\ GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q \times V \to \mathbb{R}^{m^{(r+s)}} \quad \text{dada por:}$$

$$A(F)^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}(B,b) = J^w\, B^{i_1}_{h_1} \ldots B^{i_r}_{h_r}\, A^{\ell_1}_{j_1} \ldots A^{\ell_s}_{j_s}\, F^{h_1\ldots h_r}_{\ell_1\ldots \ell_s}(b) \qquad (2.6)$$

donde q está definido en 2.2, $B = (B^i_j, B^i_{j_1 j_2}, \ldots, B^i_{j_1 \ldots j_{k+1}}) \in$
$\in GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q$, $A^i_j = ((B^t_\ell)^{-1})^i_j$ y $J = \det(B^t_\ell)$.

2.6. Definición

Sea c un número natural y sean $m,r,s,w,k,r_1,s_1,\ldots,r_c,s_c$ enteros no negativos.

*Un k-operador tensorial de $(r_1,s_1;\ldots;r_c,s_c)$-concomitancia* de tipo (r,s) y peso w es una función diferenciable

$$F:V \subset \mathbb{R}^{h-m} \to \mathbb{R}^{m^{(r+s)}}$$

definida sobre un abierto V de $\mathbb{R}^{h-m}$ (h dado por (1.1)) invariante por la acción $H^k$ tal que:

$$F^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} \circ H^k(B,b) = A(F)^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}(B,b) \tag{2.7}$$

donde $H^k$ está dada por (2.5) y A(F) por (2.6).

2.7. Definición

Si $F:V \subset \mathbb{R}^{h-m} \to \mathbb{R}^{m^{(r+s)}}$ es un k-operador tensorial de $(r_1,s_1;\ldots;r_c,s_c)$-concomitancia de tipo (r,s) y peso w, entonces de (2.7) se sigue que:

$$X(F^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} \circ H^k) = X(A(F)^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}) \tag{2.8}$$

para todo X vector tangente a $(GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q) \subset (GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{h-m})$

Las identidades (2.8) reciben el nombre de *identidades de invariancia* para F.

2.8. Definición

Estamos ahora en condiciones de definir la noción clásica de "tensores concomitantes de ciertos tensores".

Aunque las definiciones deben darse en cada caso particular, es posible dar una definición general de este hecho con ciertas imprecisiones.

Si L es una densidad tensorial $C^\infty$ de tipo (r,s) y peso w sobre una variedad diferenciable M m-dimensional y $T^{r_j}_{s_j} \in D^{r_j}_{s_j}(M)$ (campos tensoriales $C^\infty$ de tipo $(r_j,s_j)$) para $1 \leq j \leq c$, decimos entonces que:

L es *concomitante* de los tensores $T^{r_j}_{s_j}$ y sus derivadas hasta el orden k sii existe un k-operador tensorial de $(r_1,s_1;\ldots;r_c,s_c)$-concomitancia de tipo (r,s) y peso w $F:V \subset \mathbb{R}^{h-m} \to \mathbb{R}^{m^{(r+s)}}$ tal que:

i) V es un abierto invariante (que depende de los tensores dados $T^{r_j}_{s_j}$).

ii) F satisface ciertas propiedades (que dependen de los tensores dados $T^{r_j}_{s_j}$).

iii) Para cada carta local (x,U) de M

$$L^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}(p) = F^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}\left(a^{i_1\ldots i_{r_\ell}}_{(\ell)j_1\ldots j_{s_\ell}}(p); a^{i_1\ldots i_{r_\ell}}_{(\ell)j_1\ldots j_{s_\ell},\alpha}(p),\ldots, a^{i_1\ldots i_{r_\ell}}_{(\ell)j_1\ldots j_{s_\ell},\alpha_1\ldots\alpha_k}(p)\right), \quad \forall\, p \in U$$

donde $(\ell)$ significa colocar todas las variables para $1\leq \ell \leq c$, $a^{i_1\ldots i_{r_\ell}}_{(\ell)j_1\ldots j_{s_\ell}}$ indican las coordenadas de $T^{r_\ell}_{s_\ell}$ en esa carta y la coma indica derivada parcial usual.

Es claro que las imprecisiones de esta defincíón radican en la determinación del abierto invariante V(i)) y en las propiedades que debe satisfacer el operador F (ii)). Por el contrario, la condición iii) es bien precisa y es, en definitiva, la condición fundamental que debe cumplir el operador F para que L sea concomitante; por lo tanto dicha condición será una constante en todas las definiciones particulares. Como ejemplo definimos.

2.9. Ejemplo

Sea L una densidad tensorial de tipo (r,s) y peso w, y sean $G \in D_2^{\circ}(M)$ un tensor simétrico no-singular y $\psi \in D_1(M)$ una 1-forma. Decimos que L es concomitante de G hasta el orden $k_1$ y de $\psi$ hasta el orden $k_2$, o sea:

$$L = L(g_{ij};g_{ij,h_1};\ldots;g_{ij,h_1\ldots h_{k_1}};\ \psi_i;\psi_{i,h_1};\ldots;\psi_{i,h_1\ldots h_{k_2}}),$$

sii existe un k-operador tensorial de (0,2;0,1)-concomitancia ($k=\text{máx}(k_1,k_2)$) de tipo (r,s) y peso w $F:V \subset \mathbb{R}^{h-m} \to \mathbb{R}^{m^{(r+s)}}$ tal que:

i) $V = GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m$,

ii) $F^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}/_{GL(m,\mathbb{R})\times\{b\}}$ es simétrica $\forall\ b\in \mathbb{R}^m$, o sea:

$F^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}(a,b) = F^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}(a^t,b)$, donde $a^t$ significa transpuesta de $a$.

iii) si $k=k_1$ $\quad \dfrac{\partial F^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}}{\partial x_{h\alpha_1\ldots\alpha_t}} = 0 \quad , \forall\ k_2 < t \leq k$

$$\text{si } k=k_2 \qquad \frac{\partial F^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}}{\partial x_{h_1 h_2 \alpha_1\ldots\alpha_t}} = 0 \;, \; \forall\, k_1 < t \leq k$$

iv) Para cada carta local (x,U) de M

$$L^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}(p) = F^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} \;(g_{ij}(p);\psi_i(p);\; g_{ij,\alpha}(p);\; \psi_{i,\alpha}(p);\ldots;$$

$$g_{ij,\alpha_1\ldots\alpha_k}(p);\psi_{i,\alpha_1\ldots\alpha_k}(p)), \quad \forall\, p \in U$$

donde $G = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$ y $\psi = \psi_i\, dx^i$ en esa carta y donde la coma indica derivada parcial usual.

# 3. OPERADORES ESCALARES DE CONCOMITANCIA: APLICACIONES

En la presente Sección mostraremos como los conceptos desarrollados en la Sección 2 pueden ser usados para demostrar algunos nuevos resultados de la teoría de los escalares concomitantes. Los argumentos aquí usados se basan fundamentalmente en el exacto conocimiento del dominio de definición de cada concomitante. Esto en general no ocurre con el tratamiento clásico en donde los espacios en los cuales se trabaja no están definidos con precisión, lo que hace que ciertos argumentos de la teoría de variedades puedan no entenderse con claridad. Por este motivo, y para reforzar nuestro concepto, hemos incluido también redemostraciones de ciertos resultados ya conocidos de la teoría.

Trataremos aquí con operadores tensoriales de concomitancia de tipo (0,0) y peso 0, que es considerar $r=s=w=0$ en la definición 2.6 de la Sección 2. Por su importancia damos entonces la siguiente definición particular:

3.1. Definición

Un k-operador *escalar* de $(r_1,s_1;\dots;r_c,s_c)$-concomitancia es una función diferenciable $F:V \subset \mathbb{R}^{h-m} \to \mathbb{R}$ definida sobre un abierto invariante V tal que:

$$F \circ H^k(B,b) = F(b) \qquad (3.1)$$

3.2. Definición

Sea $L:M \to \mathbb{R}$ un escalar definido sobre una variedad diferenciable m-dimensional M y sean $\psi \in D_1(M)$ y $\varphi \in D^1(M)$ una 1-forma y un campo vectorial respectivamente tales que $\psi(\varphi)$ es nunca nulo.

Diremos que L es concomitante de $\psi$ y $\varphi$ , o sea $L = L(\psi_i;\varphi^i)$, sii existe un 0-operador escalar de (0,1;1,0)-concomitancia $F: \mathbb{R}^{2m}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$ tal que, para cada carta local (x,U) de M:

$$L(p) = F(\psi_i(p),\varphi^i(p)), \ \forall \ p \in U \tag{3.2}$$

donde $\psi = \psi_i \ dx^i$ y $\varphi = \varphi^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ en esa carta.

3.3. Teorema

Si L es un escalar concomitante de una 1-forma $\psi$ y un campo vectorial $\varphi$ , tales que $\psi(\varphi)$ es nunca nulo, *existe* entonces una función $f:\mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$ $C^\infty$ tal que:

$$L = f \circ \psi(\varphi) \tag{3.3}$$

Dem:

Por la definición 3.2 existe un 0-operador escalar de (0,1;1,0)-concomitancia $F: \mathbb{R}^{2m}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$ verificando (3.2).

Como k=0 es $\dim(M \times M)^1 = 2m-m^2$. Tenemos entonces, por (1.1) y (2.2), que:

$$n=2m \ , \quad h=3m, \quad h-m=2m \quad y \quad q=0.$$

De aquí, la acción $H(=H^\circ)$ definida por (2.5) es, como puede observarse de 2.4, la aplicación:

$$H:GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{2m}_{\neq 0} \to \mathbb{R}^{2m}_{\neq 0} \text{ dada por:}$$

$$H(B,a,b) = (B^i_j \ a_i, (B^{-1})^i_j \ b^j) \tag{3.4}$$

$\forall \ B \in GL(m,\mathbb{R}), \ \forall (a,b) \in \mathbb{R}^{2m}_{\neq 0}$.

Se sigue de 2.7 que F debe satisfacer las identidades de invariancia (2.8) correspondientes. Notamos:

$$(B^i_j,\ x_i, y^j)$$

las coordenadas de $GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{2m}_{\neq 0}$ . Deben satisfacerse entonces las ecuaciones:

$$\left(\frac{\partial}{\partial B^s_t}\right)_{(C,a,b)} (F \circ H) = 0 \tag{3.5}$$

$\forall\ 1 \leq s,\ t \leq m$ y $\forall\ (C,a,b) \in GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{2m}_{\neq 0}$ . Pero:

$$\left(\frac{\partial (F \circ H)}{\partial B^s_t}\right)_{(C,a,b)} = \sum_{i=1}^{2m} (D_i F)(H(C,a,b)) \left(\frac{\partial H^i}{\partial B^s_t}\right)_{(C,a,b)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)(H(C,a,b)) \left(\frac{\partial H^i}{\partial B^s_t}\right)_{(C,a,b)} +$$

$$+ \sum_{i=m+1}^{2m} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(i-m)}}\right) (H(C,a,b)) \left(\frac{\partial H^i}{\partial B^s_t}\right)_{(C,a,b)}$$

Si notamos:

$$F^i = \frac{\partial F}{\partial x_i} \text{ y } \quad F_i = \frac{\partial F}{\partial y^i},\ \forall \quad 1 \leq i \leq m$$

la igualdad anterior puede escribirse en la forma:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial (F \circ H)}{\partial B^s_t}\right)_{(C,a,b)} &= \sum_{i=1}^{m} F^i(H(C,a,b)) \left(\frac{\partial H^i}{\partial B^s_t}\right)_{(C,a,b)} + \\ &+ \sum_{i=m+1}^{2m} F_{i-m}(H(C,a,b)) \left(\frac{\partial H^i}{\partial B^s_t}\right)_{(C,a,b)}\end{aligned} \tag{3.6}$$

Por otra parte, de (3.4):

Si $1 \leq i \leq m$ es $H^i(D,u,v) = D_i^j\, u_j$, luego:

$$\left(\frac{\partial H^i}{\partial B_t^s}\right)_{(C,a,b)} = a_s\, \delta_i^t \tag{3.7}$$

y si $m+1 \leq i \leq 2m$ es $H^i(D,u,v) = (D^{-1})_j^{i-m}\, v^j$, de donde , teniendo en cuenta que $\partial (B^{-1})_j^k \,/\, \partial B_t^s = -(B^{-1})_j^t\, (B^{-1})_s^k$, resulta que:

$$\left(\frac{\partial H^i}{\partial B_t^s}\right)_{(C,a,b)} = -b^j (C^{-1})_j^t\, (C^{-1})_s^{i-m} \tag{3.8}$$

Reemplazando (3.7) y (3.8) en (3.6) resulta que:

$$\left(\frac{\partial (F\circ H)}{\partial B_t^s}\right)_{(C,a,b)} = \sum_{i=1}^{m} F^i(H(C,a,b))\, a_s\, \delta_i^t - $$

$$- \sum_{i=m+1}^{2m} F_{i-m}(H(C,a,b))\, b^j (C^{-1})_j^t\, (C^{-1})_s^{i-m} .$$

En particular podemos tomar $C=I$ (matriz identidad), luego $H(I,a,b) = (a,b)$. Usando (3.5) tenemos que:

$$F^i(a,b)\, a_j = F_j(a,b)\, b^i$$

$\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^{2m}$, $\forall\ 1 \leq i,\ j \leq m$ , o sea:

$$F^i x_j = F_j\, y^i,\ \forall\ 1 \leq i\ ,\ j \leq m \tag{3.9}$$

Sea:

$$A = \{(a,b) \in \mathbb{R}^{2m}_{\neq 0} : \exists\ 1 \leq i \leq m \text{ con } a_i = 0\} \cup$$
$$\cup\ \{(a,b) \in \mathbb{R}^{2m}_{\neq 0} : \exists\ 1 \leq j \leq m \text{ con } b^j = 0\}.$$

Luego en $\mathbb{R}^{2m}_{\neq 0} - A$ será por (3.9):

$$\frac{F^i}{y^i} = \frac{F_j}{x_j} = c$$

$\forall$ $1 \leqslant i,\ j \leqslant m$, donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante. Luego será:

$$F^i = c\, y^i \ , \quad F_j = c\, x_j \qquad \text{en} \quad \mathbb{R}^{2m}_{\neq 0} - A$$

y por lo tanto por continuidad:

$$F^i = c\, y^i \ , \quad F_j = c\, x_j \qquad \text{en} \quad \mathbb{R}^{2m}_{\neq 0} \tag{3.10}$$

Para cada $t \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ sea :

$$S_t \stackrel{'}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2m}_{\neq 0} : \quad x_i\, y^i = t\}$$

Luego $S_t$ es una hipersuperficie en $\mathbb{R}^{2m}$. Sea $i: S_t \to \mathbb{R}^{2m}_{\neq 0}$ la inclusión. Luego será:

$$\begin{aligned} d(F/_{S_t}) &= d(F \circ i) = i^*\,(dF) = \\ &= i^*(F^i\, dx_i + F_i\, dy^i) = \\ &\qquad\qquad\qquad \text{(por 3.10))} \\ &= i^*(c\, y^i\, dx_i + c\, x_i\, dy^i) = \\ &= i^*(c\, d\,(x_i\, y^i)) = \\ &= c\, i^*(d(x_i\, y^i)) = \\ &= c\, d((x_i\, y^i) \circ i) = \\ &\qquad\qquad ((x_i y^i) \circ i = \text{cte}) \\ &= c.0 = 0 \end{aligned}$$

De donde:

$$F/_{S_t} = \text{constante.}$$

O sea, existe $f: \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$F/_{S_t} = f(t).$$

Luego $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^{2m}_{\neq 0}$ tal que $a_i\ b^i \neq 0$ es:

$$F(a,b) = f((x_i\ y^i)(a,b)) \tag{3.11}$$

Ahora bien, dado $p \in M$, sea $(x,U)$ una carta de M alrededor de p. Luego $\psi = \psi_i\ dx^i$ y $\varphi = \varphi^i\ (\frac{\partial}{\partial x^i})$ en esa carta. Como $\psi(\varphi)$ es nunca nulo resulta $\psi_i\ \varphi^i$ nunca nulo, y por lo tanto de (3.2) y (3.11) resulta que:

$$L(p) = F(\psi_i(p),\ \varphi^i(p)) = f(\psi_i(p)\ \varphi^i(p)) =$$

$$= (f \circ \psi(\varphi))(p)$$

Q.E.D.

3.4. Definición

Sea $L:M \to \mathbb{R}$ un escalar definido sobre una variedad diferenciable m-dimensional M. Sea $G \in D^{\circ}_{2}(M)$ un tensor 2-covariante, simétrico y no-singular, y sea $\varphi \in D^1(M)$ un campo vectorial, tales que $G(\varphi,\varphi)$ sea nunca nulo.

Diremos que L es concomitante de G y $\varphi$, o sea $L = L(g_{ij};\ \varphi^i)$, sii existe un 0-operador escalar de (0,2;1,0)-concomitancia $F:GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0} \to \mathbb{R}$ tal que:

i) $F_{/GL(m,\mathbb{R})\times\{b\}}$ es simétrico $\forall\ b \in \mathbb{R}^m_{\neq 0}$, o sea:

$$F(a,b) = F(a^t,b) \tag{3.12}$$

$\forall\ a \in GL(m,\mathbb{R})$, $\forall\ b \in \mathbb{R}^m_{\neq 0}$, donde $a^t$ significa transpuesta de a.

ii) Para cada carta local $(x,U)$ de M:

$$L(p) = F(g_{ij}(p),\varphi^i(p)),\ \forall\ p \in U \tag{3.13}$$

donde $G = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$ y $\varphi = \varphi^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ en esa carta.

3.5. Teorema

Si L es un escalar concomitante de un tensor 2-covariante, simétrico y no-singular G y de un campo vectorial $\varphi$, tales que $G(\varphi,\varphi)$ es nunca nulo, *existe* entonces una función $f\colon \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$ $C^\infty$ tal que:

$$L = f \circ G(\varphi,\varphi) \tag{3.14}$$

Dem:

Por la definición 3.4 existe un 0-operador escalar de (0,2;1,0)-concomitancia $F\colon GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0} \to \mathbb{R}$ verificando (3.12) y (3.13).

Como k=0 es (como en el teorema 3.3) q=0. Calculando (1.1) y (2.2) en este caso resulta que:

$$n = m^2 + m, \quad h = m + m^2 + m, \quad h-m = m^2 + m.$$

De aquí, la acción $H(=H^\circ)$ definida por (2.5) es la aplicación:

$$H\colon GL(m,\mathbb{R}) \times GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0} \to GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0}$$

dada por:

$$H(B,a,b) = (B^r_i\, B^\ell_j\, a_{r\ell},\ (B^{-1})^i_j\, b^j) \tag{3.15}$$

Notamos:

$$(B^i_j\ ,\ x_{ij}, y^i)$$

las coordenadas de $GL(m,\mathbb{R}) \times GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0}$ .

Luego F debe satisfacer las identidades de invariancia (2.8). Estas son:

$$\left(\frac{\partial}{\partial B_t^s}\right)_{(C,a,b)} (F \circ H) = 0 \tag{3.16}$$

$\forall\ 1 \leq s,\ t \leq m\ ,\ \forall\ (C,a,b) \in GL(m,\mathbb{R}) \times GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0}$. Si notamos:

$$F^{ij} = \frac{\partial F}{\partial x_{ij}}\ , \qquad y \quad F_i = \frac{\partial F}{\partial y^i}\ , \quad \forall\ 1 \leq i,\ j \leq m$$

tenemos que:

$$\left(\frac{\partial}{\partial B_t^s}\right)_{(C,a,b)} (F \circ H) = \sum_{i,j=1}^{m} F^{ij}(H(C,a,b)) \left(\frac{\partial H^{ij}}{\partial B_t^s}\right)_{(C,a,b)} + \sum_{i=1}^{m} F_i(H(C,a,b)) \left(\frac{\partial H^i}{\partial B_t^s}\right)_{(C,a,b)}$$

En particular si C=I (matriz identidad) será por (3.15):

$$\left(\frac{\partial (F \circ H)}{\partial B_t^s}\right)_{(I,a,b)} = \sum_{i,j=1}^{m} F^{ij}(a,b) \left.\frac{\partial H^{ij}}{\partial B_t^s}\right/_{(I,a,b)} + \sum_{i=1}^{m} F_i(a,b) \left.\frac{\partial H^i}{\partial B_t^s}\right/_{(I,a,b)} \tag{3.17}$$

Es fácil verificar que:

$$\left.\frac{\partial H^{ij}}{\partial B_t^s}\right/_{(I,a,b)} = \delta_i^t\, a_{sj} + \delta_j^t\, a_{is} \tag{3.18}$$

y

$$\left.\frac{\partial H^i}{\partial B_t^s}\right/_{(I,a,b)} = -b^t\ \delta_s^i$$

Luego reemplazando (3.18) en (3.17) se obtiene por (3.16) que:

$$F^{tj}(a,b)\ a_{sj} + F^{jt}(a,b)\ a_{js} = F_s(a,b)b^t$$

Pero (3,12) nos dice que:

$$F^{tj} = F^{jt} \tag{3.19}$$

por lo tanto será:

$$F^{tj}(a,b)(a_{sj} + a_{js}) = F_s(a,b)b^t$$

Si en particular consideramos $a \in SGL(m,\mathbb{R})$, donde con $SGL(m,\mathbb{R})$ indicamos el conjunto de matrices simétricas e inversibles, resulta que:

$$2F^{tj}(a,b)\ a_{sj} = F_s(a,b)b^t$$

o sea:

$$F^{tj}\ x_{sj} = \frac{1}{2} F_s\ y^t, \text{ en } SGL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0} \tag{3.20}$$

O también:

$$F^{tj} = \frac{1}{2} F_s\ y^t\ x^{sj}, \text{ en } SGL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0} \tag{3.21}$$

donde $x^{sj}(a) = (a^{-1})_{sj}$. Usando (3.19) y el hecho que restringiéndonos a $SGL(m,\mathbb{R})$ es $x_{ij} = x_{ji}$ resulta de (3.20) que, en $SGL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0}$ es:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} F_s\ y^t\ x_{t\ell} &= F^{tj}\ x_{sj}\ x_{t\ell} = \\
&= F^{jt}\ x_{sj}\ x_{t\ell} = \\
&= F^{tj}\ x_{st}\ x_{j\ell} = \\
&= F^{tj}\ x_{\ell j}\ x_{ts} = \\
&= \frac{1}{2} F_\ell\ y^t\ x_{ts}
\end{aligned}$$

o sea:

$$F_s\ y^t\ x_{t\ell} = F_\ell\ y^t\ x_{ts} \tag{3.22}$$

Sea $A = \{(x,y) \in SGL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0} : \exists\ 1 \leq r \leq m \text{ con } y^j\ x_{jr} = 0\}$.

Luego de (3.22) será:

$$\frac{F_s}{y^t\, x_{ts}} = \frac{F_\ell}{y^t\, x_{t\ell}} = c, \text{ en } (SGL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0}) - A$$

donde c es una constante. Como $SGL(m,\mathbb{R})$ es una subvariedad de $GL(m,\mathbb{R})$, por continuidad tendremos que:

$$F_s = c\, y^t\, x_{ts} \quad , \text{ en } SGL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0} \tag{3.23}$$

Para cada $t \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ sea:

$$S_t = \{(x,y) \in SGL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0} : x_{ij}\, y^i\, y^j = t\}$$

Luego $S_t$ es una subvariedad de $SGL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0}$ .

Sea $i : S_t \to SGL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0}$ la inclusión.

Consideremos F y las coordenadas del espacio restringidas a la subvariedad $SGL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0}$. Son válidas entonces las relaciones (3.21) y (3.22). Tenemos entonces que:

$$d(F_{/S_t}) = d(F \circ i) = i^*(dF) =$$

$$= i^*(F^{ij}\, dx_{ij} + F_s\, dy^s) =$$

(por (3.21))

$$= i^*\left(\frac{1}{2} F_s\, y^i\, x^{sj}\, dx_{ij} + F_s\, dy^s\right) =$$

(por(3.23))

$$= i^*\left(\frac{1}{2}\, c y^t\, x_{ts}\, x^{sj}\, y^i\, dx_{ij} + c y^i\, x_{ij}\, dy^j\right) =$$

$(x_{ts}\, x^{sj} = \delta^j_t)$

$$= \frac{1}{2} c\, i^*(y^j\, y^i\, dx_{ij} + 2x_{ij}\, y^i\, dy^j) =$$

$$= \frac{1}{2} c\ \ i^*(d(x_{ij}\, y^i\, y^j)) =$$

$$= \frac{1}{2}\ c\,(d((x_{ij}\, y^i\, y^j) \circ i)) =$$

$$((x_{ij}\, y^i y^j) \circ i = \text{cte})$$

$$= \frac{1}{2} c.0 =$$

$$= 0$$

De donde:

$$F_{/S_t} = \text{cte} = f(t)$$

para una cierta función $f: \mathbb{R}_{\neq 0} \rightarrow \mathbb{R}$.

Luego $\forall\ (a,b) \in SGL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0}$ tal que $a_{ij}\, b^i\, b^j \neq 0$ es:

$$F(a,b) = f((x_{ij}\, y^i\, y^j)(a,b)) \tag{3.24}$$

Ahora bien, dado $p \in M$, sea $(x,U)$ una carta de M alrededor de p. Luego $G = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$ y $\varphi = \varphi^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ en esa carta. Como $G(\varphi,\varphi)$ es nunca nulo resulta que $g_{ij}\, \varphi^i\, \varphi^j$ es nunca nulo. Además es $g_{ij}(q) \in SGL(m,\mathbb{R})\ \forall\ q \in U$. Por lo tanto de (3.13) y (3.24) tenemos que:

$$L(p) = F(g_{ij}(p), \varphi^i(p)) = f(g_{ij}(p)\ \varphi^i(p)\ \varphi^j(p)) = (f \circ G(\varphi,\varphi))(p)$$

Q.E.D.

3.6. <u>Definición</u>

Sea $L: M \rightarrow \mathbb{R}$ un escalar definido sobre una variedad diferenciable m-dimensional M. Sea $G \in D^{\circ}_2(M)$ un tensor 2-covariante, simétrico y no-singular y sea $\phi : M \to \mathbb{R}$ un escalar, tales que G(grad $\phi$, grad $\phi$) es nunca nulo.

Diremos que L es concomitante de G y $\phi$ y sus primeras derivadas, o sea $L = L(g_{ij}; g_{ij,\ell}; \phi; \phi_{,i})$, sii existe un 1-operador escalar de (0,2;0,0)-concomitancia $F: GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m^3} \times \mathbb{R}^m_{\neq 0} \to \mathbb{R}$ tal que:

i) $F_{/GL(m,\mathbb{R}) \times \{(b,c,d)\}}$ es simétrica $\forall (b,c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m^3} \times \mathbb{R}^m_{\neq 0}$

o sea:

$$F(a,b,c,d) = F(a^t,b,c,d) \qquad (3.25)$$

donde $a^t$ significa transpuesta de a.

ii) Para cada carta local (x,U) de M:

$$L(p) = F(g_{ij}(p),\ \phi(p), g_{ij,\ell}(p),\ \phi_{,i}(p)),\ \forall\ p \in U \qquad (3.26)$$

donde $G = g_{ij}\ dx^i \otimes dx^j$ en esa carta y donde la coma indica derivada parcial usual.

3.7. Teorema [9]

Si L es un escalar concomitante de un tensor 2-covariante, simétrico y no-singular G y de un escalar $\phi$ y sus primeras derivadas, tales que G(grad $\phi$ , grad $\phi$) es nunca nulo, *existe* entonces una función $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$ $C^\infty$ tal que:

$$L = f(\phi,\ G(\text{grad}\ \phi,\ \text{grad}\ \phi)) \qquad (3.27)$$

Dem.:

Por 3.6 existe un 1-operador escalar de (0,2;0,0)- concomitancia

$F: GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m^3} \times \mathbb{R}^m_{\neq 0} \to \mathbb{R}$ verificando (3.25) y (3.26). En este caso es k=1 y por lo tanto es fácil ver que:

$$q = \frac{m^2(m+1)}{2}$$

y (3.28)

$$h-m = m^2 + 1 + m^3 + m$$

De aquí, la acción $H(=H^1)$ definida por (2.5) es la aplicación:

$$H: GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q \times GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m^3} \times \mathbb{R}^m_{\neq 0} \to GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m^3} \times \mathbb{R}^m_{\neq 0}$$

dada por:

$$H(B,a,b,c,d) = (B^r_i\, B^\ell_j\, a_{r\ell}, b, B^r_{is}\, B^\ell_j\, a_{r\ell} + B^r_i\, B^\ell_{js}\, a_{r\ell} + B^r_i\, B^\ell_j\, B^t_s\, c_{r\ell t}, B^j_i\, d_j) \tag{3.29}$$

donde $B = (B^i_j, B^i_{j\ell}) \in GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q$ y q está dado por (3.28). Notamos:

$$(B^i_j,\ B^i_{j\ell}, x_{ij}, x, x_{ij\ell}, x_i)$$

las coordenadas de $GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q \times GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m^3} \times \mathbb{R}^m_{\neq 0}$. Las identidades de invariancia correspondientes para este operador son:

$$\left(\frac{\partial (F \circ H)}{\partial B^s_t}\right)_{(C,a,b,c,d)} = 0$$

y (3.30)

$$\left(\frac{\partial (F \circ H)}{\partial B^s_{tr}}\right)_{(C,a,b,c,d)} = 0$$

Consideramos la siguiente notación:

$$F^{ij} = \frac{\partial F}{\partial x_{ij}}\ ,\quad F' = \frac{\partial F}{\partial x}\ ,\ F^{ij\ell} = \frac{\partial F}{\partial x_{ij\ell}}\quad ,\ F^{i} = \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

La condición (3.25) nos dice que:

$$F^{ij} = F^{ji} \tag{3.31}$$

Luego es fácil ver que en particular tomando $C=(I,0)$ y usando (3.29) y (3.31) las ecuaciones (3.30) se convierten en:

$$F^{it}(a,b,c,d)(a_{si} + a_{is}) + F^{ijt}(a,b,c,d)\ c_{ijs} +$$
$$+ F^{jti}(a,b,c,d)c_{jsi} + F^{tij}(a,b,c,d)c_{sij} + F^{t}(a,b,c,d)\ d_s =$$
$$= 0. \tag{3.32}$$

$$\text{y}\qquad F^{jtr}(a,b,c,d)\ (a_{sj} + a_{js}) = 0 \tag{3.33}$$

En particular si $a \in SGL(m,\mathbb{R})$ (matrices simétricas e inversibles) resulta de (3.33)que:

$$F^{jtr}(a,b,c,d)\ a_{sj} = 0$$

y como a es inversible, en $SGL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m^3} \times \mathbb{R}^m_{\neq 0}$ es:

$$F^{jtr} \equiv 0 \tag{3.34}$$

de donde reemplazando en (3.32) resulta:

$$2\ F^{it}\ x_{is} + F^{t}\ x_s = 0$$

de donde:

$$F^{it} = -\frac{1}{2}\,F^{t}\ x_s\ x^{si} \tag{3.35}$$

donde $X^{si}(a) = (a^{-1})_{si}$. Como por (3.31) el primer término de esta igualdad es simétrico en i y t también lo debe ser el segundo, luego:

$$F^t x_s x^{si} = F^i x_s x^{st} \tag{3.36}$$

Sea $A = \{(a,b,c,d) \in SGL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m^3} \times \mathbb{R}^m_{\neq 0} : \exists\ 1 \leq r \leq m$ con $a^{sr} d_r = 0\}$ .

Luego de (3.36), tenemos que fuera de A:

$$\frac{F^t}{x_s x^{st}} = \frac{F^i}{x_s x^{si}} = c$$

donde c es una constante. Como $SGL(m,\mathbb{R})$ es una subvariedad de $GL(m,\mathbb{R})$, por continuidad resulta que:

$$F^i = c\, x_s x^{si} \tag{3.37}$$

en todo $SGL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m^3} \times \mathbb{R}^m_{\neq 0}$.

Para cada $t \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ y cada $u \in \mathbb{R}$ sea:

$$S_{t,u} = \{x^{ij} x_i x_j = t \wedge x = u\}$$

Luego $S_{t,u}$ es una subvariedad de $SGL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m^3} \times \mathbb{R}^m_{\neq 0}$ con inclusión i.

Consideremos F restringida a la subvariedad $SGL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m^3} \times \mathbb{R}^m_{\neq 0}$. Son válidas entonces las relaciones (3.34), (3.35) y (3.37). Resulta entonces que:

$$\begin{aligned} d(F/_{S_{t,u}}) &= d(F \circ i) = i^*(dF) = \\ &= i^*(F^{ij} dx_{ij} + F' dx + F^{ij\ell} dx_{ij\ell} + \\ &\quad + F^i dx_i) \underset{(\mathrm{por}(3.34))}{=} \\ &= i^*(F^{ij} dx_{ij} + F^i dx_i + F' dx) = \\ &= i^*(F^{ij} dx_{ij} + F^i dx_i) + F' d(x \circ i) \underset{(x \circ i = cte)}{=} \end{aligned}$$

$$= i^*(F^{ij}\, dx_{ij} + F^{i} dx_i) =$$

(por(3.35))

$$= i^*(-\frac{1}{2} F^{j}\, x_s\, x^{si}\, dx_{ij} + F^{i}\, dx_i) =$$

(por (3.37))

$$= i^*(-\frac{1}{2} c\, x_\ell\, x^{\ell j}\, x_s\, x^{si}\, dx_{ij} + c\, x_\ell\, x^{\ell i}\, dx_i) =$$

$$= \frac{1}{2} c\, i^*(-x_\ell\, x_s\, x^{\ell j}\, x^{si}\, dx_{ij} + 2\, x_\ell\, x^{\ell i}\, dx_i) =$$

$$= \frac{1}{2} c\, i^*\, (d(x^{ij}\, x_i\, x_j)) =$$

$$= \frac{1}{2} c(d((x^{ij}\, x_i\, x_j) \circ i)) =$$

$((x^{ij}\, x_i x_j) \circ i = \text{cte})$

$$= \frac{1}{2} c.0 = 0$$

donde hemos usado que $dx^{ij} = -x^{ij}\, x^{jr}\, dx_{jr}$ y la simetría $x^{ij} = x^{ji}$ en $SGL(m, \mathbb{R})$. Luego es:

$$F_{/S_{t,u}} = \text{cte} = f(u,t)$$

para una cierta función $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$.

Luego para todo $(a,d) \in SGL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0}$ tal que $a^{ij}\, d_i\, d_j \neq 0$ es:

$$F(a,b,c,d) = f(x(b)\quad,\ (x^{ij}\, x_i\, x_j)(a,d)) \qquad (3.38)$$

Dado $p \in M$, sea $(x,U)$ una carta de $M$ alrededor de $p$. Luego $G = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$ en esa carta. La condición de que $G(\text{grad}\ \phi, \text{grad}\ \phi)$ es nunca nulo se traduce, en términos de coordenadas, en la condición que $g^{ij}\, \phi_{,i}\, \phi_{,j}$ es nunca nulo. Además es $g_{ij}(q) \in SGL(m,\mathbb{R})\ \forall\, q \in U$. Por lo tanto de (3.26) y (3.38) se concluye que:

$$L(p) = F(g_{ij}(p), \phi(p), g_{ij,\ell}(p), \phi_{,i}(p)) = f(\phi(p), g^{ij}(p)\ \phi_{,i}(p)\ \phi_{,j}(p))$$

$$= f(\phi(p),\ G(\text{grad } \phi, \text{grad } \phi)(p))$$

Q.E.D.

3.8. Definición

Sea $L:M \to \mathbb{R}$ un escalar definido sobre una variedad diferenciable m-dimensional M. Sean G y $F \in \overset{\circ}{D}_2(M)$ dos tensores 2-covariantes y no-singulares con G simétrico y F antisimétrico.

Diremos que L es concomitante de G y F, o sea $L = L(g_{ij}; F_{ij})$, sii existe un 0-operador escalar de (0,2;0,2)-concomitancia $T: GL(m,\mathbb{R}) \times GL(m,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que:

i) $T/_{GL(m,\mathbb{R}) \times \{b\}}$ es simétrico $\forall\ b \in GL(m,\mathbb{R})$

y

$T/_{\{a\} \times GL(m,\mathbb{R})}$ es antisimétrico $\forall\ a \in GL(m,\mathbb{R})$

o sea:

$$T(a,b) = T(a^t,b)$$

y (3.39)

$$T(a,b) = -T(a,b^t)$$

donde la t significa transpuesta.

ii) Para cada carta local (x,U) de M:

$$L(p) = T(g_{ij}(p),\ F_{ij}(p)),\ \forall\ p \in U \qquad (3.40)$$

donde $G = g_{ij}\ dx^i \otimes dx^j$ y $F = F_{ij}\ dx^i \otimes dx^j$ en esa carta.

3.9. Teorema [11] y [14]

Si L es un escalar sobre una variedad 4-dimensional M concomitante de dos tensores 2-covariantes y no-singulares G simétrico y F antisimétrico, *existe* entonces una función $f:\mathbb{R}_{\neq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $C^\infty$ tal que:

$$L = f(\phi,\psi) \tag{3.41}$$

donde $\phi = \det(F_{ij}\, g^{j\ell})$ y $\psi = F_{rs}\, F_{ij}\, g^{ri}\, g^{sj}$, siendo $F_{ij}$ y $g_{ij}$ las coordenadas de F y G y $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$.

<u>Dem.</u>:

Por 3.8 existe un 0-operador escalar de (0,2;0,2)-concomitancia $T: GL(4,\mathbb{R}) \times GL(4,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ verificando (3.39) y (3.40). Como $k = 0$ y $m=4$ entonces:

$$q=0 \quad , \quad n=4^2 + 4^2 \quad y \quad h-4 = 4^2 + 4^2$$

Luego la acción $H(=H^\circ)$ es la aplicación:

$$H: GL(4,\mathbb{R}) \times GL(4,\mathbb{R}) \times GL(4,\mathbb{R}) \to GL(4,\mathbb{R}) \times GL(4,\mathbb{R})$$

dada por

$$H(B,a,b) = (B^i_r\, B^j_s\, a_{ij},\ B^i_r\, B^j_s\, b_{ij})$$

Si notamos:

$$(x_{ij},\ y_{ij})$$

las coordenadas de $GL(4,\mathbb{R}) \times GL(4,\mathbb{R})$ (dominio de T) y con:

$$T^{ij} = \frac{\partial T}{\partial x_{ij}} \quad , \quad T'^{ij} = \frac{\partial T}{\partial y_{ij}}$$

entonces las identidades de invariancia correspondientes para T nos dicen que:

$$T^{ir}(a,b)\, a_{jr} + T^{ri}(a,b)\, a_{rj} + T'^{ir}(a,b)\, b_{jr} + T'^{ri}(a,b)\, b_{rj} = 0$$

Si en particular $a \in SGL(4,\mathbb{R})$ (matrices simétricas inversibles) y $b \in AGL(4,\mathbb{R})$ (matrices antisimétricas inversibles) resulta que:

$$(T^{ir}(a,b) + T^{ri}(a,b))\, a_{rj} + (-T'^{ir}(a,b) + T'^{ri}(a,b))\, b_{rj} = 0 \qquad (3.42)$$

Pero la condición (3.39) nos dice que:

$$T^{ir} = T^{ri} \quad , \qquad T'^{ir} = -T'^{ri} \qquad (3.43)$$

Reemplazando (3.43) en (3.42) tenemos entonces que en $SGL(4,\mathbb{R}) \times AGL(4,\mathbb{R})$ es:

$$T^{ri}\, x_{rj} + T'^{ri}\, y_{rj} = 0$$

de donde:

$$T^{si} = -x^{js}\, y_{rj}\, T'^{ri} \qquad (3.44)$$

donde (como siempre) $x^{js}(a) = (a^{-1})_{js}$.

Consideremos ahora sobre la subvariedad $SGL(4,\mathbb{R}) \times AGL(4,\mathbb{R})$ los siguientes escalares:

$$\phi = \det(y_{ij}\, x^{js}) = \frac{\det(y_{ij})}{\det(x_{rs})}$$

$$\psi = y_{hk}\, y_{ij}\, x^{hi}\, x^{kj}. \qquad (3.45)$$

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ sea:

$$S_{\alpha,\beta} = \{(a,b) \in SGL(4,\mathbb{R}) \times AGL(4,\mathbb{R}) : \phi(a,b) = \alpha \text{ y } \psi(a,b) = \beta\}$$

Luego $S_{\alpha,\beta}$ es una subvariedad de $SGL(4,\mathbb{R}) \times AGL(4,\mathbb{R})$. Sea i la inclusión. Luego:

$$\phi/_{S_{\alpha,\beta}} = \alpha \qquad \text{y} \qquad \psi/_{S_{\alpha,\beta}} = \beta$$

y por lo tanto:

$$d(\phi \circ i) = 0, \quad d(\psi \circ i) = 0 \qquad (3.46)$$

Es fácil ver de (3.45) que:

$$d\phi = y^{tr}\, dy_{tr} - x^{tr}\, dx_{tr} \qquad (3.47)$$

$$d\psi = x^{is}\, x^{jt}\, y_{st}\, dy_{ij} - x^{h\ell}\, x^{tk}\, y_{\ell k}\, x^{rs}\, y_{hr}\, dx_{st}$$

Es fácil ver que por ser T un 0-operador escalar de (0,2;0,2)-concomitancia, $T'^{rs}$ resulta ser un 0-operador tensorial de (0,2;0,2)-concomitancia de tipo (2,0) y peso 0. Por lo tanto, por ser la variedad 4-dimensional, el Corolario 2.1 de [5] nos asegura que
$\forall\ (a,b) \in SGL(4,\mathbb{R}) \times AGL(4,\mathbb{R})$:

$$T'^{ij}(a,b) = C_1(a,b)\ b^{ij} + C_2(a,b)\ a^{ir}\ a^{js}\ b_{rs}$$

y por lo tanto:

$$T'^{ij} = C_1\ y^{ij} + C_2\ x^{ir}\ x^{js}\ y_{rs} \qquad (3.48)$$

Consideremos T restringido a la subvariedad $SGL(4,\mathbb{R}) \times AGL(4,\mathbb{R})$, se verifican entonces (3.44), (3.46),(3.47) y (3.48)y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
d(T_{/S_{\alpha,\beta}}) &= d(T \circ i) = i^*(dT) = \\
&= i^*(T^{ij}\ dx_{ij} + T'^{ij}\ dy_{ij}) \underset{(\text{por}(3.44))}{=} \\
&= i^*(-x^{tj}\ y_{ts}\ T'^{is}\ dx_{ij} + T'^{ij}\ dy_{ij}) = \\
&= i^*(T'^{ij}(-x^{ts}\ y_{tj}\ dx_{is} + dy_{ij})) \underset{(\text{por}(3.48))}{=} \\
&= i^*\ [(C_1\ y^{ij} + C_2\ x^{ir}\ x^{j\ell}\ y_{r\ell})(-x^{ts}\ y_{tj}\ dx_{is} + dy_{ij})] = \\
&= i^*\ [C_1(-y^{ij}\ y_{tj}\ x^{ts}\ dx_{is} + y^{ij}\ dy_{ij}) + \\
&\quad + C_2(-x^{ir}\ x^{j\ell}\ y_{r\ell} x^{ts}\ y_{tj}\ dx_{is} + x^{ir}\ x^{j\ell}\ y_{r\ell}\ dy_{ij})] \underset{(\text{por}(3.47))}{=} \\
&= i^*(C_1\ d\phi + C_2\ d\psi) = \\
&= (C_1 \circ i)\ d(\phi \circ i) + (C_2 \circ i)\ d(\psi \circ i) \underset{(\text{por}(3.46))}{=} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De aquí:

$$T/S_{\alpha,\beta} = \text{cte} = f(\alpha,\beta)$$

para una cierta función $f\colon \mathbb{R}_{\neq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Luego para todo $(a,b) \in SGL(4,\mathbb{R}) \times AGL(4,\mathbb{R})$ es:

$$T(a,b) = f(\phi(a,b),\psi(a,b)) \tag{3.49}$$

donde $\phi$ y $\psi$ están dadas por (3.45).

Por último, para concluir el teorema, consideremos $p \in M$ y $(x,U)$ una carta de $M$ alrededor de $p$. Luego es $G = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$ y $F = F_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$ en esa carta con $g_{ij}(q) \in SGL(4,\mathbb{R})$ y $F_{ij}(q) \in AGL(4,\mathbb{R})$ $\forall\, q \in U$, por lo tanto de (3.40) y (3.49) se concluye que:

$$L(p) = T(g_{ij}(p),\, F_{ij}(p)) = f(\phi(g_{ij}(p),\, F_{ij}(p)), \psi(g_{ij}(p),\, F_{ij}(p)))$$

que es (3.41).

Q.E.D.

3.10. Definición

Sea $L\colon M \to \mathbb{R}$ un escalar definido sobre una variedad diferenciable m-dimensional $M$. Sea $G \in \mathcal{D}^0_2(M)$ un tensor 2-covariante simétrico y no-singular y sea $\psi \in D_1(M)$ una 1-forma tales que $G(\varphi,\varphi)$ es nunca nulo, donde $\varphi$ es el único campo vectorial ($\varphi \in D^1(M)$) tal que $G(\varphi,.) = \psi$.

Diremos que $L$ es concomitante de $G$ y $\psi$, o sea $L = L(g_{ij};\psi_i)$, sii existe un 0-operador escalar de (0,2; 0,1) -concomitancia $F\colon GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0} \to \mathbb{R}$ tal que:

i) $F_{/GL(m,\mathbb{R})\times\{b\}}$ es simétrico $\forall\, b \in \mathbb{R}^m_{\neq 0}$, o sea:

$$F(a,b) = F(a^t,b) \tag{3.50}$$

ii) Para cada carta Local $(x,U)$ de $M$:

$$L(p) = F(g_{ij}(p),\ \psi_i(p))\ ,\ \forall\ p\in U \tag{3.51}$$

donde $G = g_{ij}\ dx^i \otimes dx^j$ y $\psi = \psi_i\ dx^i$ en esa carta.

3.11. Teorema

Si L es un escalar concomitante de un tensor 2-covariante, simétrico y no-singular G y de una 1-forma $\psi$, tal que $G(\varphi,\varphi)$ es nunca nulo, siendo $\varphi$ el único campo vectorial tal que $G(\varphi,.)= \psi$ , *existe* entonces una función $f\colon \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$ $C^\infty$ tal que:

$$F = f \circ G(\varphi,\varphi) \tag{3.52}$$

Dem.:

Por 3.10 existe un 0-operador escalar de (0,2;0,1)-concomitancia $F\colon GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0} \to \mathbb{R}$ verificando (3.50) y (3.51). Como $k=0$ resulta en este caso:

$$q=0,\qquad n=m^2+ m,\quad h-m = m^2 + m.$$

Luego la acción $H(=\overset{\circ}{H})$ es la aplicación:

$$H\colon GL(m, \mathbb{R}) \times GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0} \to GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0} \text{ dada por:}$$

$$H(B,a,b) = (B^i_r\ B^j_s\ a_{ij},\ B^i_r\ b_i).$$

Si notamos:

$$(x_{ij},y_i)$$

las coordenadas de $GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0}$ (dominio de F) y con:

$$F^{ij} = \frac{\partial F}{\partial x_{ij}}\quad ,\ F^i = \frac{\partial F}{\partial y_i}$$

resulta de las identidades de invariancia de F que:

$$F^{ts}(a,b)\ a_{\ell s} + F^{rt}(a,b)\ a_{r\ell} + F^{t}(a,b)b_{\ell} = 0$$

Si en particular $a \in SGL(m,\mathbb{R})$ será:

$$(F^{ts}(a,b) + F^{st}(a,b))\ a_{\ell s} + F^{t}(a,b)b_{\ell} = 0$$

Pero (3.50) nos dice que:

$$F^{ij} = F^{ji} \tag{3.53}$$

de donde , en $SGL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0}$:

$$2F^{ts}\ x_{\ell s} + F^{t}\ y_{\ell} = 0$$

y por lo tanto:

$$F^{ts} = -\frac{1}{2} F^{t}\ y_{\ell}\ x^{\ell s} \tag{3.54}$$

Como (3.53) nos asegura que el primer término de (3.54) es simé- trico en t y s también lo debe ser el segundo. Luego:

$$F^{t}\ y_{\ell}\ x^{\ell s} = F^{s} y_{\ell}\ x^{\ell t} \tag{3.55}$$

Sea $A = \{(a,b) \in SGL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0} : \exists\ 1 \leq r \leq m \text{ con } x^{ir}\ y_i = 0\}$. Resulta entonces de (3.55) que fuera de A es:

$$\frac{F^{t}}{y_{\ell}\ x^{\ell t}} = \frac{F^{s}}{y_{\ell}\ x^{\ell s}} = c$$

donde c es una constante. Como $SGL(m,\mathbb{R})$ es una subvariedad de $GL(m,\mathbb{R})$, por continuidad resulta que:

$$F^{i} = c\ y_j\ x^{ij} \tag{3.56}$$

en todo $SGL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0}$.

Para cada $t \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ sea:

$$S_t = \{(a,b) \in SGL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m : (x^{ij}\ y_i\ y_j)(a,b) = t\}$$

Luego $S_t$ es una subvariedad de $SGL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0}$. Sea i su inclusión.

Consideremos F restringido a la subvariedad $SGL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0}$. Se verifican entonces (3.54) y (3.56), tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
d(F/_{S_t}) &= d(F \circ i) = i^*(dF) = \\
&= i^*(F^{ij}\ dx_{ij} + F^i\ dy_i) = \quad \text{(por (3.54))} \\
&= i^*(-\frac{1}{2}\ F^i\ y_r\ x^{rj}\ dx_{ij} + F^i\ dy_i) = \quad \text{(por (3.56))} \\
&= i^*(-\frac{1}{2}\ c\ y_s\ x^{is}\ y_r\ x^{rj}\ dx_{ij} + c\ y_s\ x^{is}\ dy_i) = \\
&= (\frac{1}{2}\ c)\ i^*(-y_s\ y_r\ x^{is}\ x^{rj}\ dx_{ij} + 2\ y_s\ x^{is}\ dy_i) = \\
&= (\frac{1}{2}\ c)\ i^*(d(y_r y_s\ x^{rs})) = \\
&= (\frac{1}{2}\ c)\ d((y_r y_s x^{rs}) \circ i)) = \quad ((y_r y_s x^{rs}) \circ i = cte) \\
&= (\frac{1}{2}\ c)\ .\ 0 = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$F/_{S_t} = cte = f(t)$$

para una cierta $f: \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$

Luego $\forall (a,b) \in SGL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m_{\neq 0}$ tal que $a^{ij}\ b_i\ b_j \neq 0$ $(a^{ij} = (a^{-1})_{ij}$ es:

$$F(a,b) = f((x^{ij}\ y_i\ y_j)(a,b)) \tag{3.57}$$

Como siempre, dado $p \in M$ sea $(x,U)$ una carta de M alrededor de p. Luego $G = g_{ij}\ dx^i \otimes dx^j$ y $\psi = \psi_i\ dx^i$ en esa carta. La condición

$G(\varphi,\varphi)$ nunca nulo implica, en coordenadas, la condición $g^{ij}\psi_i\ \psi_j$ nunca nulo y como además es $g_{ij}(q) \in SGL(m,\mathbb{R})\ \forall\ q \in U$ se concluye de (3.51) y (3.57) que:

$$L(p) = F(g_{ij}(p),\psi_i(p)) = f(g^{ij}(p)\ \psi_i(p)\ \psi_j(p)) =$$
$$= (f \circ G(\varphi,\varphi))(p)$$

Q.E.D.

3.12. Observación

En los teoremas 3.3, 3.5, 3.7, 3.9 y 3.11 hemos probado la existencia de ciertas funciones f que caracterizan los concomitantes allí dados. Hemos asegurado también que esas funciones son de tipo $C^\infty$. Sin embargo no queda claro de nuestras demostraciones que este último hecho sea cierto. Demostraremos entonces aquí un resultado general que abarca todos nuestros casos.

Sean $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $C^\infty$ y $h: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $C^\infty$ de rango $n (n \leqslant m)$. Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $g = f \circ h$. *Entonces* f resulta $C^\infty$.

Dem.:

Como h tiene rango n podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que localmente:

$$\det A \neq 0 \qquad \text{siendo } A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial h_n}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial h_n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial h_n}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

Sea entonces $\tilde{h}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ dada por:

$$\tilde{h}(x^1,\dots,x^m) = (h_1(x^1,\dots,x^m),\dots,h_n(x^1,\dots,x^m), , x^{n+1},\dots,x^m)$$

o sea,

$$\tilde{h} = (h_1, \ldots, h_n, \pi_{n+1}, \ldots, \pi_m)$$

donde $\pi_i: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es la proyección a la i-ésima coordenada.

Luego $\tilde{h}$ es $C^\infty$ y:

$$D(\tilde{h}) = \left(\begin{array}{c|c} A & X \\ \hline O & I \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \det (D(\tilde{h})) \neq 0.$$

Concluimos entonces que, localmente, $\tilde{h}$ es un difeomorfismo. Resulta entonces que:

$$h = (\pi_1 \times \ldots \times \pi_n) \circ \tilde{h}$$

y por lo tanto:

$$g = f \circ (\pi_1 \times \ldots \times \pi_n) \circ \tilde{h}$$

Ahora bien, como g y $\tilde{h}^{-1}$ son $C^\infty$ resulta que:

$$f \circ (\pi_1 \times \ldots \times \pi_n) \text{ es } C^\infty.$$

Por último sea $I_{n,m}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la inclusión natural

$$I_{n,m}(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0)$$

por lo tanto $I_{n,m}$ es $C^\infty$ y:

$$f = (f \circ (\pi_1 \times \ldots \times \pi_n)) \circ I_{n,m}$$

de donde resulta lo afirmado. -///-

# 4.- TENSORES CONCOMITANTES DE UNA METRICA Y UN COVECTOR

En la Sección precedente hemos explicado porqué los conceptos desarrollados en la Sección 2 son necesarios en la teoría de los escalares concomitantes. En el caso de los tensores concomitantes aquella explicación sigue siendo válida, pero hay dos razones de peso que hacen que elijamos, a partir de ahora, el tratamiento clásico. La primera es que, en general, los resultados sobre tensores concomitantes se obtienen recurrentemente, o sea se basan en resultados previos sobre tensores concomitantes de menor orden y por lo tanto sobre escalares concomitantes (para determinar la forma general de los tensores concomitantes de ciertos tensores dados es necesario determinar primero la forma general de los escalares concomitantes de esos tensores). La segunda es que, como siempre ocurre, una vez que una cierta teoría se ha desarrollado y entendido pueden, y deben, tomarse ciertas libertades de notación y argumentación.

## 4.1. Introducción

Sean $g_{ij}$ las componentes de un tensor métrico y $\psi_i$ las componentes de un covector en una variedad m-dimensional M. Es ya conocida [4] la forma general de los tensores de tipo (r,s) concomitantes de $g_{ij}$ y $\psi_i$ en los casos $0 \leq r + s \leq 2$. Los casos r+s=3 y r+s=4 también han sido determinados en [4] pero bajo ciertas condiciones restrictivas de simetría en sus índices.

En esta Sección determinaremos en general (sin restricciones de ningún tipo) todos los tensores de tipo (r,s) concomitantes de $g_{ij}$ y $\psi_i$ para r+s = 3 y r+s =4. Observemos antes que los escalares están determinados por el Teorema 3.11 y los tensores de orden 1 y 2 por los siguientes dos teoremas:

4.2. Teorema [ 4]

$$\text{Si } L_i = L_i(g_{rs};\psi_r)$$

*existen entonces* funciones $\alpha$ y $\beta$ tales que:

$$L_i = \alpha(\rho)\ \psi_i + \delta_2^m\ [\beta(\rho)\ \sqrt{g}\ \psi^r\ \varepsilon_{ri}] \tag{4.1}$$

donde $\psi^r = g^{rs}\psi_s$, $g = \det(g_{rs})$, $\varepsilon_{ri}$ es la densidad tensorial de Levi-Civita y donde $\rho$ es un escalar dado por:

$$\rho = g^{rs}\ \psi_r\ \psi_s \tag{4.2}$$

./// .

4.3. Teorema [ 4]

$$\text{Si } L_{ij} = L_{ij}(g_{rs};\psi_r)$$

*existen entonces* funciones $\alpha_i (1 \leqslant i \leqslant 6)$ tales que:

$$\begin{aligned} L_{ij} = {} & (1 - \delta_1^m)\ [\alpha_1(\rho)\psi_i\psi_j + \alpha_2(\rho)\ g_{ij}] + \\ & + \delta_3^m\ [\alpha_3(\rho)\ \sqrt{g}\ \psi^r\varepsilon_{rij}] + \\ & + \delta_2^m\ [\alpha_4(\rho)\sqrt{g}\ \psi_j\ \psi^r\ \varepsilon_{ri} + \alpha_5(\rho)\ \sqrt{g}\ \varepsilon_{ij}] + \\ & + \delta_1^m\ [\alpha_6(\rho)\ g_{11}] \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde $\varepsilon_{i_1 \ldots i_r}$ es la densidad tensorial de Levi-Civita y $\rho$ viene dada por (4.2)./// .

4.4. Teorema

$$\text{Si } L_{ijh} = L_{ijh}(g_{rs};\psi_r)$$

*existen entonces* funciones $\alpha_i (1 \leqslant i \leqslant 18)$ tales que:

$$\begin{aligned} L_{ijh} = {} & (1 - \delta_1^m)[\alpha_1(\rho)\psi_i\psi_j\ \psi_h + \alpha_2(\rho)\ \psi_i\ g_{jh} + \alpha_3(\rho)\psi_j\ g_{ih} + \\ & + \alpha_4(\rho)\ \psi_h\ g_{ij}] + \\ & + \delta_4^m\ [\alpha_5(\rho)\ \sqrt{g}\ \psi^r\ \varepsilon_{rijh}] + \end{aligned}$$

$$+ \delta_3^m [\sqrt{g} [\alpha_6(\rho) \psi_i \psi^r \varepsilon_{rjh} + \alpha_7(\rho) \psi_j \psi^r \varepsilon_{rih} +$$

$$+ \alpha_8(\rho) \psi_h \psi^r \varepsilon_{rij} + \alpha_9(\rho) \varepsilon_{ijh}]] +$$

$$+ \delta_2^m [\sqrt{g} [\alpha_{10}(\rho) \psi_i \varepsilon_{jh} + \alpha_{11}(\rho) \psi_j \varepsilon_{ih} + \alpha_{12}(\rho) \psi_h \varepsilon_{ij} +$$

$$+ \alpha_{13}(\rho) \psi_i \psi_h \psi^r \varepsilon_{rj} + \alpha_{14}(\rho) \psi_j \psi_h \psi^r \varepsilon_{ri} +$$

$$+ \alpha_{15}(\rho) g_{ij} \psi^r \varepsilon_{rh} + \alpha_{16}(\rho) g_{ih} \psi^r \varepsilon_{rj} +$$

$$+ \alpha_{17}(\rho) g_{jh} \psi^r \varepsilon_{ri}]] +$$

$$+ \delta_1^m [\alpha_{18}(\rho) g_{11} \psi_1] \tag{4.4}$$

donde $\varepsilon_{i_1 \ldots i_r}$ es la densidad tensorial de Levi-Civita y $\rho$ viene dada por (4.2).

Dem.

Notamos:

$$L_{ijh}^{rs} = \frac{\partial L_{ijh}}{\partial g_{rs}}, \quad L_{ijh}^{r} = \frac{\partial L_{ijh}}{\partial \psi_r}$$

La identidad de invariancia correspondiente para $L_{ijh}$ nos dice que:

$$(L_{ijh}^{bt} + L_{ijh}^{tb}) g_{at} = - L_{ijh}^{b} \psi_a + \delta_i^b L_{ajh} + \delta_j^b L_{iah} + \delta_h^b L_{ija}$$

contrayendo con $g^{as}$ y usando la simetría de $L_{ijh}^{bt}$ en b y t tenemos que:

$$2 L_{ijh}^{bt} = -L_{ijh}^{b} \psi^t + \delta_i^b g^{at} L_{ajh} + \delta_j^b g^{at} L_{iah} + \delta_h^b g^{at} L_{ija}$$

Como el primer miembro de esta igualdad es simétrico en b y t también lo debe ser el segundo, de donde:

$$- L^{b}_{ijh} \; \psi^{t} + \delta^{b}_{i} \, g^{at} \, L_{ajh} + \delta^{b}_{j} \, g^{at} \, L_{iah} + \delta^{b}_{n} \, g^{at} \, L_{ija} =$$
$$= -L^{t}_{ijh} \, \psi^{b} + \delta^{t}_{i} \, g^{ab} \, L_{ajh} + \delta^{t}_{j} \, g^{ab} \, L_{iah} + \delta^{t}_{h} \, g^{ab} \, L_{ijh} \tag{4.5}$$

contrayendo b=i y contrayendo luego con $g_{ts}$ en (4.5) resulta que:

$$(m-1) \; L_{sjh} + L_{jsh} + L_{hjs} = L^{i}_{ijh} \, \psi_{s} - L^{t}_{ijh} \, \psi^{i} \; g_{ts} + \\ + g_{js} \, g^{ai} \, L_{iah} + g_{hs} \, g^{ai} \, L_{ija} \tag{4.6}$$

Pero:

$$L^{t}_{ijh} \, \psi^{i} \, g_{ts} = (L_{ijh} \, \psi^{i})^{,t} \, g_{ts} - L_{sjh}$$

donde $(L_{ijh} \, \psi^{i})^{,t} = \dfrac{\partial}{\partial \psi_{t}} (L_{ijh} \, \psi^{i})$

de donde reemplazando en (4.6):

$$(m-2) \; L_{sjh} + L_{jsh} + L_{hjs} = L^{i}_{ijh} \, \psi_{s} - (L_{ijh} \, \psi^{i})^{,t} \, g_{ts} + \\ + g_{js} \, g^{ai} \, L_{iah} + g_{hs} \, g^{ai} L_{ija}$$

Llamemos:

$$\theta_{jhs} = L^{i}_{ijh} \; \psi_{s} - (L_{ijh} \, \psi^{i})^{,t} \, g_{ts} + g_{js} \, g^{ai} \, L_{iah} + \\ + g_{hs} \, g^{ai} \, L_{ija} \tag{4.7}$$

Podemos escribir entonces:

$$(m-2) \; L_{sjh} + L_{jsh} + L_{hjs} = \theta_{jhs} \tag{4.8}$$

Análogamente, si contraemos b=j y b=h en (4.5) obtenemos:

$$(m-2) \; L_{ish} + L_{sih} + L_{ihs} = \zeta_{ihs} \tag{4.9}$$

y

$$(m-2) \; L_{ijs} + L_{sji} + L_{isj} = \mu_{ijs} \tag{4.10}$$

donde:

$$\zeta_{ihs} = L^j_{ijh}\,\psi_s - (L_{ijh}\,\psi^j)^{,t}\,g_{ts} + g_{is}\,g^{aj}\,L_{ajh} +$$

$$+ g_{hs}\,g^{aj}\,L_{ija} \tag{4.11}$$

y

$$\mu_{ijs} = L^h_{ijh}\,\psi_s - (L_{ijh}\,\psi^h)^{,t}\,g_{ts} + g_{is}\,g^{ah}\,L_{ajh} +$$

$$+ g_{js}\,g^{ah}\,L_{iah} \tag{4.12}$$

Es claro que en las expresiones de $\theta_{jhs}$,$\zeta_{ihs}$ y $\mu_{ijs}$, dadas por (4.7), (4.11) y (4.12) respectivamente, sólo aparecen tensores concomitantes de $g_{rs}$ y $\psi_r$ 1-covariantes y 2-covariantes cuya forma general es ya conocida por los teoremas 4.2 y 4.3. Por lo tanto si pudiésemos despejar $L_{ijh}$ en función de $\theta_{jhs}$ , $\zeta_{ihs}$ y $\mu_{ijs}$ habremos obtenido la forma general de los tensores 3-covariantes concomitantes de $g_{rs}$ y $\psi_r$.

Ahora bien, podemos escribir:

$$L_{sjh} = S_{sjh} + A_{sjh} \tag{4.13}$$

donde $S_{sjh}$ y $A_{sjh}$ son tensores 3-covariantes concomitantes de $g_{rt}$ y $\psi_r$ satisfaciendo:

$$\begin{aligned} S_{sjh} &= S_{shj} \\ A_{sjh} &= -A_{shj}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Es claro entonces que para determinar $L_{ijh}$ bastará determinar todos los tensores $S_{ijh}$ y $A_{ijh}$ satisfaciendo (4.14). Es claro también que $S_{ijh}$ y $A_{ijh}$ satisfacen ecuaciones análogas a (4.8), (4.9) y (4.10). En particular por (4.14) tenemos que:

$$(m-2)\ S_{sjh} + S_{jsh} + S_{hjs} = \theta_{jhs}(S) \qquad (1)$$

$$(m-1)\ S_{sjh} + S_{jsh} = \zeta_{shj}(S) \qquad (2)$$

$$(m-1)\ S_{sjh} + S_{hjs} = \mu_{sjh}(S) \qquad (3)$$

donde (S) significa reemplazar $L_{ijh}$ por $S_{ijh}$ en (4.8), (4.9) y (4.10). Haciendo (3) + (2) - (1) obtenemos:

$$S_{sjh} = \frac{1}{m}\ [-\theta_{jhs}(S) + \zeta_{shj}(S) + \mu_{sjh}(S)] \qquad (4.15)$$

lo que determina $S_{sjh}$ totalmente.

Para determinar $A_{sjh}$ procedemos en forma análoga. Teniendo en cuenta (4.14) podemos reescribir (4.8), (4.9) y (4.10) obteniendo para $A_{jhs}$ las ecuaciones:

$$(m-2)\ A_{sjh} + A_{jsh} + A_{hjs} = \theta_{jhs}(A) \qquad (4)$$

$$(m-3)\ A_{sjh} + A_{jsh} = \zeta_{shj}(A) \qquad (5)$$

$$(m-3)\ A_{sjh} + A_{hjs} = \mu_{sjh}(A) \qquad (6)$$

Haciendo (4) - (5) - (6) obtenemos:

$$(4-m)\ A_{sjh} = \theta_{jhs}(A) - \zeta_{shj}(A) - \mu_{sjh}(A)$$

y por lo tanto para <u>m≠4:</u>

$$A_{sjh} = \frac{1}{(m-4)}\ [-\theta_{jhs}(A) + \zeta_{shj}(A) + \mu_{sjh}(A)] \qquad (4.16)$$

Sea entonces m=4 y definamos:

$$\eta^a = \frac{\varepsilon^{acbu} A_{cbu}}{\sqrt{g}} \tag{4.17}$$

donde $\varepsilon^{acbu}$ es la densidad tensorial de Levi-Civita. Es claro que $\eta^a$ es un vector (tensor 1-contravariante) concomitante de $g_{rs}$ y $\psi_r$ y por lo tanto usando el hecho que $\eta_b = \eta^a g_{ab}$ es un covector también concomitante de $g_{rs}$ y $\psi_r$ y que $\eta_b$ está bien determinado por el teorema 4.2 resulta que $\eta^a$ es un vector cuya forma general es conocida.

Resulta de (4.17) que:

$$\sqrt{g}\ \eta^a\ \varepsilon_{asjh} = \varepsilon^{acbu}\ A_{cbu}\ \varepsilon_{asjh} \tag{4.18}$$

Es fácil ver, teniendo en cuenta que m=4, que:

$$\varepsilon^{acbu} A_{cbu}\ \varepsilon_{asjh} = A_{sjh} - A_{shj} - A_{jsh} + A_{jhs} - A_{hjs} + A_{hsj}$$

de donde, por (4.14):

$$\varepsilon^{acbu} A_{cbu}\ \varepsilon_{asjh} = 2\ [A_{sjh} + A_{jhs} + A_{hsj}] \tag{4.19}$$

Reemplazando (4.19) en (4.18) obtenemos:

$$2[A_{sjh} + A_{jhs} + A_{hsj}] = \sqrt{g}\ \eta^a\ \varepsilon_{asjh} \tag{4.20}$$

Por otra parte reemplazando $L_{ijh}$ por $A_{ijh}$ en (4.8) y teniendo en cuenta que m=4 resulta que:

$$2\ A_{sjh} + A_{jsh} + A_{hjs} = \theta_{jhs}(A) \tag{4.21}$$

Multiplicando (4.21) por 2, sumándole (4.20) y teniendo en cuenta (4.14), obtenemos en el caso <u>m=4</u> :

$$A_{sjh} = \frac{1}{6}\left[\theta_{jhs}(A) + \sqrt{g}\ \eta^{a}\ \varepsilon_{asjh}\right]. \qquad (4.22)$$

Teniendo en cuenta entonces (4.7), (4.11), (4.12),(4.13), (4.15),(4.16),(4.17),(4.22) y los teoremas 4.2 y 4.3 se concluye lo afirmado en (4.4).

Q.E.D.

4.5. Teorema

Un *sistema de generadores* para el espacio de los tensores 4-covariantes concomitantes de $g_{rs}$ y $\psi_r$ ($L_{ijkh} = L_{ijkh}(g_{rs};\psi_r)$), con coeficientes funciones $\alpha = \alpha(\rho)$ donde $\rho$ está dada por (4.2), viene dado por:

i) Si m=1

$$G_1 = \{g_{11}\ \psi_1\ \psi_1\}$$

ii) Si m > 5

$$G_2 = \{\psi_i\ \psi_j\ \psi_k\ \psi_h\ ;\ g_{[ij}\ \psi_k\ \psi_{h]}\ ;\ g_{[ij}\ g_{kh]}\}$$

iii) Si m=5

$$G_3 = G_2 \cup \{\sqrt{g}\ \psi^{s}\ \varepsilon_{sjkhi}\}$$

iv) Si m=4

$$G_4 = G_3 \cup \{\sqrt{g}\ \varepsilon_{jkhi}\ ;\ \sqrt{g}\ \psi^{s}\ \varepsilon_{s[ijk}\ \psi_{h]}\}$$

v) Si <u>m=3</u>

$$G_5 = G_2 \cup \{\sqrt{g}\ \psi^s\ \varepsilon_{s[jk}\ \psi_i\ \psi_{h]} ; \sqrt{g}\ \psi^s\ \varepsilon_{s[jk}\ g_{ih]} ;$$

$$; \sqrt{g}\ \varepsilon_{[jkh}\ \psi_{i]}\}$$

vi) Si <u>m=2</u>

$$G_6 = G_2 \cup \{\sqrt{g}\ \varepsilon_{[jk}\ \psi_i\ \psi_{h]} ; \sqrt{g}\ \varepsilon_{jk}\ g_{hi} ; \sqrt{g}\ \psi^s\ \varepsilon_{s[j}\ \psi_k\ \psi_i\ \psi_{h]} ;$$

$$\sqrt{g}\ \psi^s\ \varepsilon_{s[j}\ g_{ki}\ \psi_{h]}\}$$

donde $\varepsilon_{i_1 \ldots i_r}$ es la densidad tensorial de Levi-Civita y donde los corchetes significan considerar el conjunto formado por todas las posibles simetrizaciones de los subíndices encerrados por ellos (por ejemplo:

$$\varepsilon_{i[j}\ g_{hk]} \doteq \{\varepsilon_{ij}\ g_{hk}, \varepsilon_{ij}\ g_{kh}, \varepsilon_{ih} g_{kj}\ , \varepsilon_{ih}\ g_{jk}, \ \varepsilon_{ik}\ g_{jh}, \ \varepsilon_{ik}\ g_{hj}\} =$$

$$= \{\varepsilon_{ij}\ g_{hk}, \varepsilon_{ih}\ g_{kj}, \varepsilon_{ik}\ g_{jh}\}\ )$$

<u>Dem.</u>:

Sea $L_{ijkh} = L_{ijkh}\ (g_{rs} ; \psi_r)$

Notamos:

$$L^{rs}_{ijkh} = \frac{\partial L_{ijkh}}{\partial g_{rs}}\ , \quad L^{r}_{ijkh} = \frac{\partial L_{ijkh}}{\partial \psi_r}$$

Usando la simetría $L^{rs}_{ijkh} = L^{sr}_{ijkh}$ de la identidad de invariancia correspondiente para $L_{ijkh}$ resulta que:

$$2L^{bt}_{ijkh} = -L^{b}_{ijkh}\ \psi^t + \delta^b_i\ g^{at}\ L_{ajkh} + \delta^b_j\ \ g^{at}\ L_{iakh} +$$

$$+ \delta^b_k\ g^{at}\ L_{ijah} + \delta^b_h\ g^{at}\ L_{ijka}$$

Usando nuevamente la simetría de $L^{bt}_{ijkh}$ en b y t:

$$-L^{b}_{ijkh}\,\psi^{t} + \delta^{b}_{i}\,g^{at}\,L_{ajkh} + \delta^{b}_{j}\,g^{at}\,L_{iakh} + \delta^{b}_{k}\,g^{at}\,L_{ijak} + \delta^{b}_{h}\,g^{at}L_{ijka} =$$

$$= -L^{t}_{ijkh}\,\psi^{b} + \delta^{t}_{i}\,g^{ab}\,L_{ajkh} + \delta^{t}_{j}\,g^{ab}\,L_{iakh} + \delta^{t}_{k}\,g^{ab}\,L_{ijak} +$$

$$+ \delta^{t}_{h}\,g^{ab}\,L_{ijka}\,. \tag{4.23}$$

Contrayendo b=i y contrayendo luego con $g_{ts}$ en (4.23) resulta que:

$$(m-2)\,L_{sjkh} + L_{jskh} + L_{kjsh} + L_{hjks} = \theta_{jkhs} \tag{4.24}$$

donde:

$$\theta_{jkhs} = L^{i}_{ijkh}\,\psi_{s} - (L_{ijkh}\,\psi^{i})^{,t}\,g_{ts} + g_{js}\,g^{ai}\,L_{iakh} +$$

$$+ g_{ks}\,g^{ai}\,L_{ijah} + g_{hs}\,g^{ai}\,L_{ijka} \tag{4.25}$$

y

$$(L_{ijkh}\,\psi^{i})^{,t} = \frac{\partial}{\partial\,\psi_{t}}\,(L_{ijkh}\,\psi^{i})$$

Análogamente, contrayendo b=j, b=k y b=h en (4.5) se obtiene:

$$(m-2)\,L_{iskh} + L_{sikh} + L_{iksh} + L_{ihks} = \zeta_{ikhs} \tag{4.26}$$

$$(m-2)\,L_{ijsh} + L_{sjih} + L_{isjh} + L_{ijhs} = \mu_{ijhs} \tag{4.27}$$

$$(m-2)\,L_{ijks} + L_{sjki} + L_{iskj} + L_{ijsk} = \pi_{ijks} \tag{4.28}$$

donde:

$$\zeta_{ikhs} = L^{j}_{ijkh}\,\psi_{s} - (L_{ijkh}\,\psi^{j})^{,t}\,g_{ts} + g_{is}\,g^{aj}\,L_{ajkh} +$$

$$+ g_{ks}\,g^{aj}\,L_{ijah} + g_{hs}\,g^{aj}\,L_{ijka} \tag{4.29}$$

$$\mu_{ijhs} = L^{k}_{ijkh}\,\psi_s - (L_{ijkh}\,\psi^k)^{,t}\,g_{ts} + g_{is}\,g^{ak}\,L_{ajkh} + $$

$$+ g_{js}\,g^{ak}\,L_{iakh} + g_{hs}\,g^{ak}\,L_{ijka} \qquad (4.30)$$

$$\pi_{ijks} = L^{h}_{ijkh}\,\psi_s - (L_{ijkh}\,\psi^h)^{,t}\,g_{ts} + g_{is}\,g^{ah}\,L_{ajkh} + $$

$$+ g_{js}\,g^{ah}\,L_{iakh} + g_{ks}\,g^{ah}\,L_{ijah} \qquad (4.31)$$

Es claro que en las expresiones de $\theta_{jkhs}$, $\zeta_{ikhs}$, $\mu_{ijhs}$ y $\pi_{ijks}$ dadas por (4.25) y (4.29) a (4.31) sólo aparecen tensores concomitantes de $g_{rs}$ y $\psi_r$ 2 y 3-covariantes cuya forma general es ya conocida por los teoremas 4.3 y 4.4. Por lo tanto si pudiésemos despejar $L_{ijkh}$ en función de $\theta, \zeta, \mu$ y $\pi$ habremos obtenido la forma general de los tensores 3-covariantes concomitantes de $g_{rs}$ y $\psi_r$.

Ahora bien, podemos escribir:

$$L_{sjkh} = S_{sjkh} + T_{sjkh} + Q_{sjkh} + A_{sjkh} \qquad (4.32)$$

donde S,T,Q y A son tensores 4-covariantes concomitantes de $g_{rs}$ y $\psi_r$ satisfaciendo:

$$\begin{aligned} S_{sjkh} &= S_{jskh} = S_{sjhk} \\ T_{sjkh} &= T_{jskh} = -\,T_{sjhk} \\ Q_{sjkh} &= -Q_{jskh} = Q_{sjhk} \\ A_{sjkh} &= -A_{jskh} = -A_{sjhk} \end{aligned} \qquad (4.33)$$

Es claro entonces que para determinar $L_{sjkh}$ bastará determinar todos los tensores S,T,Q y A satisfaciendo (4.33). Es claro también que S,T,Q y A satisfacen ecuaciones análogas a (4.24) y (4.26) a (4.28).

Cambiando índices y haciendo (4.24) + (4.26) - (4.27) - (4.28) se obtiene:

$$2[L_{jskh} - L_{sjhk}] = \theta_{jkhs} + \zeta_{skhj} - \mu_{sjhk} - \pi_{sjkh}$$

de donde, usando (4.33) tenemos que:

$$T_{sjkh} = \frac{1}{4}[\theta_{jkhs}(T) + \zeta_{skhj}(T) - \mu_{sjhk}(T) - \pi_{sjkh}(T)] \qquad (4.34)$$

y

$$Q_{sjkh} = \frac{1}{4}[-\theta_{jkhs}(Q) - \zeta_{skhj}(Q) + \mu_{sjhk}(Q) + \pi_{sjkh}(Q)] \quad (4.35)$$

donde (T) y (Q) significan reemplazar en (4.25) y (4.29) a (4.31) L por T y Q respectivamente. Por lo tanto (4.34) y (4.35) determinan T y Q totalmente.

Para determinar S reemplazamos L por S en (4.24) y tenemos en cuenta (4.33) para obtener:

$$(m-1)\ S_{sjkh} + S_{kjsh} + S_{hjks} = \theta_{jkhs}(S) \qquad (4.36)$$

y cambiando índices:

$$(m-1)\ S_{hjks} + S_{kjhs} + S_{sjkh} = \theta_{jksh}(S)$$

y

$$(m-1)\ S_{kjsh} + S_{sjkh} + S_{hjsk} = \theta_{jshk}(S)$$

Sumando estas tres últimas ecuaciones y teniendo en cuenta (4.33) obtenemos:

$$(m+1)\ [S_{sjkh} + S_{hjks} + S_{kjsh}] = \theta_{jkhs}(S) + \theta_{jksh}(S) + \theta_{jshk}(S) \qquad (4.37)$$

de donde multiplicando (4.36) por (m+1) y restándole (4.37) resulta para todo m≠2:

$$S_{sjkh} = \frac{1}{(m+1)(m-2)} [m\, \theta_{jkhs}(S) - \theta_{jksh}(S) - \theta_{jshk}(S)] \qquad (4.38)$$

Para determinar A reemplazamos L por A en (4.24) y teniendo en cuenta (4.33) obtenemos:

$$(m-3)\, A_{sjkh} + A_{kjsh} + A_{hjks} = \theta_{jkhs}(A) \qquad (4.39)$$

y cambiando índices:

$$(m-3)\, A_{kjsh} + A_{sjkh} + A_{hjsk} = \theta_{jshk}(A)$$

y

$$(m-3)\, A_{hjks} + A_{kjhs} + A_{sjkh} = \theta_{jksh}(A).$$

Sumando estas tres últimas ecuaciones y usando (4.33) resulta:

$$(m-1)\, A_{sjkh} + (m-3)\, A_{kjsh} + (m-3)\, A_{hjks} =$$
$$= \theta_{jkhs}(A) + \theta_{jshk}(A) + \theta_{jksh}(A) \qquad (4.40)$$

de donde multiplicando (4.39) por (m-3) y restándole (4.40) resulta para todo m≠2 y m≠5 :

$$A_{sjkh} = \frac{1}{(m-2)(m-5)} [(m-4)\, \theta_{jkhs}(A) - \theta_{jshk}(A) - \theta_{jksh}(A)] \qquad (4.41)$$

Supongamos ahora m=5 y definamos:

$$\eta^a = \frac{\varepsilon^{acbud}\, A_{cbud}}{\sqrt{g}} \qquad (4.42)$$

donde $\varepsilon^{acbud}$ es la densidad tensorial de Levi-Civita. Por la misma razón dada en el teorema anterior es claro que $\eta^a$ es un vector cuya forma general es conocida por el teorema 4.2 .

Es fácil ver, teniendo en cuenta que m=5, que:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{acbud} A_{cbud}\, \varepsilon_{asjkh} = {} & A_{sjkh} - A_{sjhk} - A_{skjh} + A_{skhj} - \\ & - A_{shkj} + A_{shjk} - A_{jskh} + A_{jshk} + \\ & + A_{jksh} - A_{jkhs} + A_{jhks} - A_{jhsk} + \\ & + A_{ksjh} - A_{kshj} - A_{kjsh} + A_{kjhs} + \\ & + A_{khsj} - A_{khjs} - A_{hsjk} + A_{hskj} + \\ & + A_{hjsk} - A_{hjks} + A_{hkjs} - A_{hksj}\end{aligned}$$

de donde teniendo en cuenta (4.33) y (4.42) resulta que:

$$\begin{aligned}4[A_{sjkh} + A_{jksh} + A_{jhks}] + 4[A_{skhj} + A_{shjk} + A_{khsj}] = \\ = \sqrt{g}\, \eta^a\, \varepsilon_{asjkh}.\end{aligned} \qquad (4.43)$$

De (4.39) y (4.27) y el hecho que m=5 resultan:

$$2\, A_{sjkh} + A_{kjsh} + A_{hjks} = \theta_{jkhs}(A) \qquad (4.44)$$

y

$$2\, A_{skhj} + A_{hksj} + A_{shkj} = \mu_{skjh}(A) \qquad (4.45)$$

Pero por (4.33):

$$A_{sjkh} + A_{jksh} + A_{jhks} = 3\, A_{sjkh} -[2\, A_{sjkh} + A_{kjsh} + A_{hjks}]$$

y

$$A_{skhj} + A_{shjk} + A_{khsj} = 3\, A_{skhj} -[2\, A_{skhj} + A_{hksj} + A_{shkj}]$$

de donde por (4.44) y (4.45) resulta:

$$A_{sjkh} + A_{hksj} + A_{jhks} = 3\, A_{sjkh} - \theta_{jkhs}(A) \tag{4.46}$$

y

$$A_{skhj} + A_{shjk} + A_{khsj} = 3\, A_{skhj} - \mu_{skjh}(A) \tag{4.47}$$

Reemplazando (4.46) y (4.47) en (4.43) resulta:

$$A_{sjkh} + A_{skhj} = \frac{1}{12}\,[\sqrt{g}\ \ \eta^{a}\ \varepsilon_{asjkh} + 4\ \theta_{jkhs}\ (A) + $$

$$+\ 4\mu_{skjh}(A)]\ .$$

Por último, cambiando índices en (4.45) y restándole esta última ecuación obtenemos, en el caso <u>m=5</u>:

$$A_{kjsh} = \frac{1}{2}\,[\,\mu_{kjhs}(A) - \frac{1}{12}[\sqrt{g}\ \ \eta^{a}\ \varepsilon_{asjkh} + 4\ \theta_{jkhs}(A) + $$

$$+\ 4\ \mu_{skjh}(A)]] . \tag{4.48}$$

Supongamos ahora m=2.

Es facil ver, teniendo en cuenta (4.33) que para <u>m=2</u>:

$$A_{sjkh} = \phi\ g\ \varepsilon_{sj}\ \varepsilon_{kh} \tag{4.49}$$

donde $\phi$ es un escalar concomitante de $g_{rs}$ y $\psi_r$ y por lo tanto $\phi = \alpha(\rho)$ por el teorema 3.11. Para verificar (4.49) basta considerar $\phi = A_{1212}/g$ en cada sistema de coordenadas y probar que $\phi$ es un escalar concomitante de $g_{rs}$ y $\psi_r$.

Por último nos queda por determinar S cuando m=2.

Cambiando índices en (4.24) y (4.27) y restándolas se obtiene:

$$L_{sjkh} - L_{khsj} = \theta_{jksh} - \mu_{khsj} \tag{4.50}$$

Podemos escribir:

$$S_{sjkh} = V_{sjkh} + W_{sjkh} \tag{4.51}$$

donde V y W son tensores 4-covariantes concomitantes de $g_{rs}$ y $\psi_r$ satisfaciendo:

$$V_{sjkh} = V_{jskh} = V_{sjhk} = V_{khsj} \tag{4.52}$$

y

$$W_{sjkh} = W_{jskh} = W_{sjhk} = - W_{khsj} \tag{4.53}$$

Es claro entonces que para determinar S en el caso m=2 bastará con determinar V y W satisfaciendo (4.52) y (4.53).

Por(4.50) y (4.53) resulta que para <u>m=2</u>:

$$W_{sjkh} = \frac{1}{2} \; [\theta_{jksh}(W) - \mu_{khsj}(W)] \tag{4.54}$$

lo que determina W.

Para determinar V consideremos para $p \in M$ el subespacio $H_p$ de $T^{\circ}_{4}(M_p)$ formado por los elementos:

$$C_{sjkh}(dx^s)_p \otimes (dx^j)_p \otimes (dx^k)_p \otimes (dx^h)_p \tag{4.55}$$

cuyas componentes $C_{sjkh}$ satisfacen (4.52). Es fácil ver que existen únicamente 6 componentes independientes, a saber: $C_{1111}$, $C_{1112}$, $C_{1122}$, $C_{1212}$, $C_{1222}$ y $C_{2222}$. Por lo tanto:

$$\dim H_p \leqslant 6 \tag{4.56}$$

Consideremos entonces $X_{(1)}, \ldots, X_{(6)}$ los siguientes tensores 4-covariantes concomitantes de $g_{rs}$ y $\psi_r$:

$$
\begin{aligned}
X_{(1)sjkh} &= g_{sj}\, g_{kh} \\
X_{(2)sjkh} &= g_{sj}\, \psi_k\, \psi_h + g_{kh}\, \psi_s\, \psi_j \\
X_{(3)sjkh} &= \psi_s\, \psi_j\, \psi_k\, \psi_h \\
X_{(4)sjkh} &= g_{sk}\, g_{jh} + g_{jk}\, g_{sh} \\
X_{(5)sjkh} &= \sqrt{g}\;\; \psi^t [\, \varepsilon_{ts}\, \psi_j\, \psi_k\, \psi_h + \varepsilon_{tj}\, \psi_s\, \psi_k\, \psi_h + \\
&\quad + \varepsilon_{tk}\, \psi_s\, \psi_j\, \psi_h + \varepsilon_{th}\, \psi_s\, \psi_j\, \psi_k ] \\
X_{(6)sjkh} &= \sqrt{g}\; \psi^t\, [\, \varepsilon_{ts}\, \psi_j\, g_{kh} + \varepsilon_{tj}\, \psi_s\, g_{kh} + \\
&\quad + \varepsilon_{tk}\, \psi_h\, g_{sj} + \varepsilon_{th}\, \psi_k\, g_{sj} ]
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

Claramente $X_{(i)}(P) \in H_p$ $\forall\ 1 \leq i \leq 6$. Probaremos ahora que $\{X_{(i)}\ (P)\}_{i=1}^{6}$ es linealmente independiente . Sean $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq 6)$ tales que $\sum_{i=1}^{6} \lambda_i\, X_{(i)}(p) = 0$. Por lo tanto será:

$$\sum_{i=1}^{6} \lambda_i\, X_{(i)\,sjkh}(p) = 0 \tag{4.58}$$

Para p dado consideremos un sistema de coordenadas tal que:

$$\psi_2(P) = 0, \qquad g_{ij}(P) = \pm\, \delta_{ij} \tag{4.59}$$

y por lo tanto:

$$\psi^2(P) = 0\ , \qquad \psi^1(P) = \pm\, \psi_1(P) \tag{4.60}$$

Teniendo en cuenta (4.57) y (4.58) para los índices sjkh = 1111, 1112, 1122, 1222, 2222 y 1212 y usando (4.59) y (4.60) se obtienen las siguientes 6 ecuaciones:

$$\lambda_1 \pm 2(\psi_1(P))^2 \lambda_2 + (\psi_1(P))^4 \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0$$

$$\pm (\psi_1(P))^4 \lambda_5 + (\psi_1(P))^2 \lambda_6 = 0$$

$$\pm \lambda_1 \pm (\psi_1(P))^2 \lambda_2 = 0$$

$$\pm (\psi_1(P))^2 \lambda_6 = 0$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_4 = 0$$

$$\lambda_4 = 0$$

Es fácil ver de aquí que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_6 = 0$ y por lo tanto los $X_{(i)}(P)$ son linealmente independientes, de donde teniendo en cuenta (4.56) resulta:

$$\dim H_p = 6$$

y por lo tanto $\{X_{(i)}(P)\}_{i=1}^{6}$ es una base de $H_p$ y entonces:

$$V_{sjkh} = \sum_{i=1}^{6} \phi_i X_{(i)sjkh} \tag{4.61}$$

donde, es fácil verlo, los $\phi_i$ son escalares concomitantes de $g_{rs}$ y $\psi_r$ ya conocidos por el teorema 3.11.

Teniendo en cuenta entonces (4.25), (4.29 /32), (4.34/5), (4.38), (4.41/2), (4.48/9), (4.51), (4.54), (4.61) y los teoremas 3.11 y 4.2/4 se obtiene lo afirmado.

Q.E.D.

# 5. EXPRESIONES DE EULER-LAGRANGE Y ECUACIONES DE CAMPO

Es bien conocido que muchas de las ecuaciones de campo de la física teórica pueden deducirse de la aplicación de un principio variacional a un Lagrangiano adecuadamente elegido. Más precisamente si $\rho^A$ y $\lambda^\alpha$ son las componentes de dos objetos geométricos y si L es una función de las $\rho^A$ y sus derivadas hasta el orden M y de $\lambda^\alpha$ y sus derivadas hasta el orden Q, es decir:

$$L = L(\rho^A;\rho^A_{,i_1};\dots;\rho^A_{,i_1\dots i_M};\lambda^\alpha;\ \lambda^\alpha_{,i_1};\dots;\ \lambda^\alpha_{,i_1\dots i_Q}) \tag{5.1}$$

entonces la aplicación de un principio variacional a L, fijando $\lambda^\alpha$, da como resultado las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$E_A(L) = 0 \tag{5.2}$$

donde:

$$E_A(L) = -\frac{\partial L}{\partial\rho^A} + \sum_{r=1}^{M} (-1)^{r+1} \frac{\partial^r}{\partial X^{i_1}\dots\partial X^{i_r}} \left(\frac{\partial L}{\partial\rho^A_{,i_1\dots i_r}}\right) \tag{5.3}$$

y donde hemos empleado la convención de Einstein para la suma (cada $i_\ell$ va sumado de 1 a m).

Si en lugar de suponer que las $\lambda^\alpha$ están prefijadas suponemos que lo están las $\rho^A$ y les aplicamos el mismo principio variacional, entonces obtenemos otro grupo de ecuaciones:

$$E_\alpha(L) = 0 \tag{5.4}$$

donde $E_\alpha(L)$ viene dado por una expresión análoga a (5.3) cambiando $\rho^A$ por $\lambda^\alpha$ y M por Q.

Por un resultado de Lovelock [6] estas expresiones son operadores tensoriales de concomitancia.

## 5.I. EL TENSOR MOMENTO-ENERGIA Y LAS ECUACIONES DE EINSTEIN-MAXWELL

En la teoría de la relatividad general, la interacción del campo gravitacional (caracterizado por un tensor simétrico y no-singular $g_{ij}$) y el campo electromagnético sin fuentes (caracterizado por un tensor antisimétrico $F_{ij}$) se supone gobernado por las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell:

$$R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij}R = -\frac{1}{2}\left(F^{ik} F^{j}{}_{k} - \frac{1}{4} g^{ij} F^{rs} F_{rs}\right) \tag{5.5}$$

$$F^{ij}{}_{/j} = 0 \tag{5.6}$$

y
$$F_{ij/k} + F_{ki/j} + F_{jk/i} = 0 \tag{5.7}$$

donde $F^{ik} = g^{is} g^{kt} F_{st}$, $F^{j}{}_{k} = g^{ij} F_{ik}$, $R$ la curvatura escalar, $R^{ij} = R^{k}_{thk}\, g^{ti} g^{hj}$ y donde la barra vertical indica derivada covariante.

Es conocido que estas ecuaciones pueden ser obtenidas mediante la aplicación de un principio variacional a partir de una elección adecuada de una densidad Lagrangiana $L$, introduciendo un campo vectorial $\psi_i$ y un campo tensorial $F_{ij}$ definido por:

$$F_{ij} = \psi_{i,j} - \psi_{j,i} \tag{5.8}$$

En efecto, sea

$$L_1 = \sqrt{g}\; R + \frac{1}{4}\sqrt{g}\; F^{ij} F_{ij} \tag{5.9}$$

donde $F_{ij}$ esta dado por (5.8). Luego $L_1$ es una densidad Lagrangiana del tipo:

$$L = L(g_{ij}; g_{ij,h}; g_{ij,hk}; \psi_i; \psi_{i,j}) \tag{5.10}$$

En particular, por (5.2) y (5.4), las ecuaciones de Euler-

Lagrange correspondientes son:

$$E^{ij}(L) = 0 \tag{5.11}$$

y

$$E^{i}(L) = 0 \tag{5.12}$$

donde, por (5.3) y su análogo:

$$E^{ij}(L) = -\frac{\partial L}{\partial g_{ij}} + \frac{\partial}{\partial X^h}\left(\frac{\partial L}{\partial g_{ij,h}}\right) - \frac{\partial^2}{\partial X^h\,\partial X^k}\left(\frac{\partial L}{\partial g_{ij,hk}}\right) \tag{5.13}$$

y

$$E^{i}(L) = -\frac{\partial L}{\partial \psi_i} + \frac{\partial}{\partial X^j}\left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{i,j}}\right) \tag{5.14}$$

En particular para el Lagrangiano $L_1$ dado por (5.9) es conocido que (5.11) se reduce a (5.5), (5.12) a (5.6), mientras que (5.7) es una consecuencia inmediata de la definición (5.8).

Ahora bien, la densidad Lagrangiana $L_1$ dada por (5.9) es del tipo:

$$L = \sqrt{g}\;\; R + \tilde{L} \tag{5.15}$$

donde

$$\tilde{L} = \tilde{L}(g_{ij};\psi_i;\psi_{i,j}) \tag{5.16}$$

Lovelock [7] ha encontrado todas las densidades Lagrangianas del tipo (5.15) tales que (5.12) se reduce a (5.6) y ha mostrado que ellas tienen esencialmente el mismo tensor momento-energía que el del Lagrangiano $L_1$ dado por (5.9) (o sea, también (5.11) se reduce a (5.5)).

Las densidades Lagrangianas L del tipo (5.15) (donde $\tilde{L}$ es del tipo (5.16)) se dice que satisfacen el "Principio de mínimo acoplamiento gravitacional" (MGC). Si suponemos además que L es "gauge invariant" (invariante por medidas) es conocido [3] que $\tilde{L}$((5.16)) es del tipo:

$$\tilde{L} = \tilde{L}(g_{ij};F_{ij}) \tag{5.17}$$

El mismo Lovelock [8] ha probado también una especie de recíproca de lo anterior "Si L es una densidad Lagrangiana del tipo (5.15) (con $\tilde{L}$ del tipo (5.17)) tal que (5.11) se reduce a (5.5) entonces también (5.12) se reduce a (5.6)".

Daremos aquí una demostración más sencilla de este último resultado basándonos en el hecho que por el teorema 3.9 de la Sección 3 conocemos la forma general de los escalares del tipo (5.17).

Sea L una densidad Lagrangiana gauge invariant verificando el principio de mínimo acoplamiento gravitacional (MGC). Luego L es del tipo (5.15) con $\tilde{L}$ una densidad Lagrangiana del tipo (5.17).

Sea V el abierto del espacio $2m^2$-dimensional dado por $g_{ij}$ y $F_{ij}$ definido por la condición $\det F_{ij} \neq 0$.

Como $\tilde{L}$ es una densidad Lagrangiana del tipo (5.17) resulta que $\tilde{L}/\sqrt{g}$ es un escalar del mismo tipo, y por el teorema 3.9 sabemos que, si nos restringimos al abierto V, existe una función f $C^\infty$ tal que:

$$\frac{\tilde{L}}{\sqrt{g}} = f(\phi,\psi)$$

y por lo tanto

$$\tilde{L} = \sqrt{g}\ \ f(\phi,\psi) \tag{5.18}$$

donde

$$\phi = \det(F_{ij}\ g^{jk}) \tag{5.19}$$

y

$$\psi = F^{ij}\ F_{ij} \tag{5.20}$$

Por lo tanto de (5.15) con (5.17) y (5.18) resulta que:

$$L = \sqrt{g}\ \ R + \sqrt{g}\ f(\phi,\psi) \tag{5.21}$$

Como queremos determinar L de forma tal que (5.11) se reduzca a (5.5) una tal L debe verificar la ecuación:

$$E^{ij}(L) = \sqrt{g}\ (R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R + \frac{1}{2} F^{ik} F^{j}{}_{k} - \frac{1}{8} g^{ij} F^{rs} F_{rs}) \qquad (5.22)$$

Pero, como es conocido:

$$E^{ij}(\sqrt{g}\ R) = \sqrt{g}(R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R)$$

entonces, por (5.21) y el hecho que $E^{ij}(L) = E^{ij}(\sqrt{g}\ R) + E^{ij}(\sqrt{g}\ f(\phi,\psi))$, (5.22) se reduce a:

$$E^{ij}(\sqrt{g}\ f(\phi,\psi)) = \sqrt{g}\ ( \frac{1}{2} F^{ik} F^{j}{}_{k} - \frac{1}{8} g^{ij} F^{rs} F_{rs}) \qquad (5.23)$$

Puede verse de (5.19) y (5.20) que $\sqrt{g}\ f(\phi,\psi)$ no depende de las primeras y segundas derivadas de $g_{ij}$, por lo tanto de (5.13) y (5.23) resulta que:

$$\frac{\partial}{\partial g_{ij}} (\sqrt{g}\ f(\phi,\psi)) = \sqrt{g}\ (- \frac{1}{2} F^{ik} F^{j}{}_{k} + \frac{1}{8} g^{ij} F^{rs} F_{rs}) \qquad (5.24)$$

Ahora bien:

$$\frac{\partial}{\partial g_{ij}} (\sqrt{g}\ f(\phi,\psi)) = \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial g_{ij}} f(\phi,\psi) + \sqrt{g}\ D_1 f(\phi,\psi) \frac{\partial \phi}{\partial g_{ij}} + \sqrt{g}\ D_2 f(\phi,\psi) \frac{\partial \psi}{\partial g_{ij}} \qquad (5.25)$$

donde $D_1 f$ y $D_2 f$ indican las derivadas parciales de f respecto de sus variables. Del hecho que $\partial g / \partial g_{ij} = g\, g^{ij}$ resulta:

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial g_{ij}} = \frac{1}{2} \sqrt{g}\ g^{ij} \qquad (5.26)$$

Por otra parte de (5.19) podemos observar que $\phi = \det(F_{rs})/g$

de donde:

$$\frac{\partial \phi}{\partial g_{ij}} = -\phi \; g^{ij} \tag{5.27}$$

Para calcular $\partial \psi / \partial g_{ij}$ observemos de (5.20) que $\psi = g^{rh} g^{sk} F_{hk} F_{rs}$ y por lo tanto:

$$\frac{\partial \psi}{\partial g_{ij}} = \frac{\partial g^{rh}}{\partial g_{ij}} g^{sk} F_{hk} F_{rs} + \frac{\partial g^{sk}}{\partial g_{ij}} g^{rh} F_{hk} F_{rs} = \text{(cambiando índices)}$$

$$= \frac{\partial g^{rh}}{\partial g_{ij}} g^{sk} F_{hk} F_{rs} + \frac{\partial g^{rh}}{\partial g_{ij}} g^{sk} F_{kh} F_{sr} = \quad (F_{ij} = -F_{ji})$$

$$= 2 \frac{\partial g^{rh}}{\partial g_{ij}} g^{sk} F_{hk} F_{rs} = 2(-\frac{1}{2} (g^{ri} g^{hj} + g^{rj} g^{hi}) g^{sk} F_{hk} F_{rs}) =$$

$$= - g^{ri} g^{hj} g^{sk} F_{hk} F_{rs} - g^{rj} g^{hi} g^{sk} F_{hk} F_{rs} = \text{(cambiando índices)}$$

$$= -2 \; g^{hi} g^{rj} g^{ks} F_{hk} F_{rs} = -2 \; F^{is} F^{j}{}_{s} \tag{5.28}$$

Reemplazando entonces (5.26), (5.27) y (5.28) en (5.25) resulta que:

$$\frac{\partial}{\partial g_{ij}} (\sqrt{g} \; f(\phi,\psi)) = \frac{1}{2} \sqrt{g} \; g^{ij} f(\phi,\psi) - \sqrt{g} \; D_1 f(\phi,\psi) \phi \; g^{ij} - \\ - \sqrt{g} \; D_2 f(\phi,\psi) \; 2 \; F^{is} F^{j}{}_{s} \tag{5.29}$$

De (5.24) y (5.29) resulta que:

$$(f(\phi,\psi)) - 2D_1 f(\phi,\psi)\phi - \frac{1}{4} F^{rs} F_{rs}) \; g^{ij} + \\ + (1-4 \; D_2 f(\phi,\psi)) \; F^{is} F^{j}{}_{s} = 0 \tag{5.30}$$

Ahora bien, como estamos restringidos al abierto V, para cada punto fijo de la variedad 4-dimensional espacio-tiempo sabemos que existe un sistema de coordenadas tal que, en el punto:

$$(g_{ij} + F_{ij}) = \begin{vmatrix} -1 & \alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & 1 \end{vmatrix} \tag{5.31}$$

Vamos a probar, usando este sistema de coordenadas especial, que los tensores $g^{ij}$ y $F^{is}\,F^{j}{}_{s}$ son linealmente independientes en V. Supongamos que:

$$\lambda\, g^{ij} + \mu F^{is}\, F^{j}{}_{s} = 0.$$

Luego, en el punto considerado

$$\lambda\, g^{ij} + \mu\, g^{ih}\, g^{sk}\, g^{jt}\, F_{hk}\, F_{ts} = 0$$

considerando el sistema de coordenadas donde vale (5.31) y tomando i=j=1 primero e i=j=4 después tenemos que:

$$\lambda + \mu\, \alpha^2 = 0$$

y

$$\lambda - \mu\, \beta^2 = 0$$

de donde $\mu(\alpha^2 + \beta^2) = 0$. Pero como estamos restringidos al abierto V resulta $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, por lo tanto será $\lambda = \mu = 0$, lo que prueba la independencia lineal de los tensores. Resulta entonces de (5.30) que:

$$D_2\, f(\phi,\psi) = \frac{1}{4} \tag{5.32}$$

y

$$f(\phi,\psi) - 2\, D_1 f(\phi,\psi).\, \phi - \frac{1}{4}\, \psi = 0 \tag{5.33}$$

De (5.32) resulta que existe h dependiendo solo de $\phi$ tal que:

$$f(\phi,\psi) = \frac{1}{4}\, \psi + h(\phi) \tag{5.34}$$

de donde reemplazando (5.34) en (5.33) obtenemos que h satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$h(\phi) - 2h'(\phi).\phi = 0$$

entonces resulta, para una cierta constante C, que:

$$h(\phi) = C\sqrt{\phi}$$

de donde por (5.34):

$$f(\phi,\psi) = \frac{1}{4}\psi + C\sqrt{\phi} \tag{5.35}$$

Reemplazando por último (5.35) en (5.21) resulta que:

$$L = \sqrt{g}\quad (R + \frac{1}{4}\psi + C\sqrt{\phi}) \tag{5.36}$$

o también:

$$L = L_1 + C\sqrt{g}\sqrt{\phi} \tag{5.37}$$

Ahora bien, la igualdad (5.36)(ó (5.37)) es válida en V.

Pero V es un abierto denso y por lo tanto por continuidad (ambos miembros de la igualdad son $C^\infty$ ) resulta que (5.36) (y (5.37)) es válida en todo el espacio.

Hemos demostrado entonces el siguiente teorema:

5.1. Teorema

Si L es una densidad Lagrangiana en el espacio- tiempo concomitante del tensor métrico y de un covector y sus primeras derivadas y si L es gauge invariant, satisface el principio de mínimo acoplamiento gravitacional (MGC) y verifica (5.22), *entonces* L es de la forma:

$$L = \sqrt{g}\ (R + \frac{1}{4}\psi + C\sqrt{\phi})$$

donde C es una constante, y donde $\phi$ y $\psi$ están dadas por (5.19) y (5.20) respectivamente. ///.

Estudiaremos ahora las ecuaciones de Euler-Lagrange (5.14) correspondientes a una densidad Lagrangiana L de la forma (5.36). Para ello observemos que de (5.19):

$$\sqrt{F} = \sqrt{g}\ \sqrt{\phi} \tag{5.38}$$

donde $F = \det(F_{ij})$. Afirmamos que:

$$\sqrt{F} = \left|\frac{1}{8}\,\varepsilon^{ijrs}\,F_{ij}\,F_{rs}\right| \tag{5.39}$$

En efecto: Si $F \neq 0$ para cada punto fijo del espacio-tiempo existe un sistema de coordenadas tal que, en el punto, se verifica (5.31). Por lo tanto es facil ver, usando ese sistema de coordenadas, que en el punto:

$$\varepsilon^{ijrs}\,F_{ij}\,F_{rs} = 8\,\alpha\,\beta \tag{5.40}$$

y que:

$$F = \alpha^2\,\beta^2 \tag{5.41}$$

Juntando (5.40) y (5.41) se concluye (5.39) en el caso $F \neq 0$. Ahora bien si $F=0$ se sabe también que dado un punto existe un sistema de coordenadas tal que, en el punto:

$$(g_{ij} + F_{ij}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \gamma & \pm\gamma \\ 0 & -\gamma & -1 & 0 \\ 0 & \mp\gamma & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

de donde es facil ver que, en el punto:

$$\varepsilon^{ijrs}\,F_{ij}\,F_{rs} = 0 \tag{5.42}$$

y por lo tanto (como $F=0$) también se verifica (5.39).

De (5.39) concluimos que localmente:

$$\sqrt{F} = \frac{1}{8}\varepsilon^{ijrs} F_{ij} F_{rs} \quad ó \quad \sqrt{F} = -\frac{1}{8}\varepsilon^{ijrs} F_{ij} F_{rs} \tag{5.43}$$

Pero:

$$\varepsilon^{ijst}{}_{/j} = 0 \tag{5.44}$$

$$\varepsilon^{ijst} \psi_{i/j} F_{st} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijst} (\psi_{i/j} - \psi_{j/i}) F_{st} \underset{(5.8)}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon^{ijst} F_{ij} F_{st} \tag{5.45}$$

y

$$\varepsilon^{ijst} \psi_i F_{st/j} = \frac{1}{3} (\varepsilon^{ijst} \psi_i F_{st/j} +$$

$$+ \varepsilon^{istj} \psi_i F_{tj/s} + \varepsilon^{itjs} \psi_i F_{js/t}) =$$

$$= \frac{1}{3} \varepsilon^{ijst} \psi_i (F_{st/j} + F_{tj/s} + F_{js/t}) = 0 \tag{5.46}$$

esto último por (5.7) que es consecuencia inmediata de (5.8).

Por lo tanto juntando (5.44), (5.45) y (5.46) resulta que:

$$\varepsilon^{ijrs} F_{ij} F_{rs} = 2(\varepsilon^{ijrs} \psi_i F_{rs})_{/j}$$

o sea $\varepsilon^{ijrs} F_{ij} F_{rs}$ es una divergencia, de donde por (5.43) localmente $\sqrt{F}$ es una divergencia y por lo tanto, como ya es conocido:

$$E^i(\sqrt{F}) = 0 \tag{5.47}$$

Luego resulta que si L es una densidad Lagrangiana de la forma (5.36) entonces por (5.38) y (5.47):

$$E^i(L) = E^i\left(\sqrt{g}\left(R + \frac{1}{4}\psi\right)\right) + C\, E^i(\sqrt{g}\sqrt{\phi}) = E^i(L_1) \tag{5.48}$$

donde $L_1$ es la densidad Lagrangiana definida en (5.9). Concluimos entonces el siguiente Teorema:

5.2. Teorema

Si L es una densidad Lagrangiana en el espacio-tiempo, concomitante del tensor métrico y de un covector y sus primeras derivadas y si L es gauge invariant, satisface el principio de mínimo acoplamiento gravitacional (MGC) y verifica (5.22), *entonces* L verifica también que:

$$E^i(L) = F^{ij}{}_{/j}$$

Es decir, la elección usual del tensor momento-energía implica las ecuaciones de Maxwell.

## 5.II. EL TENSOR MOMENTO-ENERGIA Y LA ECUACION DE KLEIN-GORDON

Es sabido [16] que, en la física teórica, la ecuación que describe el campo escalar de partículas sin cargas de masa K y spin cero, y que es la contraparte relativista de la ecuación de Schrödinger, es la ecuación de Klein-Gordon:

$$g^{ij} \phi_{/ij} = K^2\phi \qquad (5.49)$$

donde $\phi$ es un campo escalar y K una constante.

Es conocido que esta ecuación puede obtenerse mediante la aplicación de un principio variacional a partir de una elección adecuada de una densidad Lagrangiana. En efecto, sea

$$L_2 = \frac{1}{2} \sqrt{g} \, (g^{ij} \phi_{,i} \phi_{,j} + K^2 \phi^2) \qquad (5.50)$$

luego $L_2$ es una densidad Lagrangiana del tipo:

$$L = L(\phi;\phi_{,i};g_{ij}) \tag{5.51}$$

Los operadores de Euler-Lagrange asociados a un L de este tipo son:

$$E(L) = -\frac{\partial L}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{,i}}\right) \tag{5.52}$$

y

$$E^{ij}(L) = -\frac{\partial L}{\partial g_{ij}} \tag{5.53}$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes son:

$$E(L) = 0 \qquad y \ E^{ij}(L) = 0 \tag{5.54}$$

Es conocido, y fácil de ver, que para el Lagrangiano $L_2$ dado por (5.50) resulta:

$$E(L_2) = \sqrt{g}(g^{ij} \ \phi_{/ij} - K^2 \ \phi) \tag{5.55}$$

y

$$E^{ij}(L_2) = \frac{1}{2}\sqrt{g}\left(-\frac{1}{2} g^{ij} g^{rs} \phi_{,r} \phi_{,s} + g^{ir} g^{js} \phi_{,r} \phi_{,s} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} g^{ij} K^2 \phi^2\right) \tag{5.56}$$

por lo tanto la elección de $L_2$ y la aplicación del principio variacional nos determina la ecuación de Klein-Gordon, y el segundo miembro de (5.56) puede considerarse como el correspondiente tensor Momento-Energía.

Ahora bien, Noriega [10] ha encontrado todas las densidades Lagrangianas L del tipo (5.51) tales que:

$$E(L) = \sqrt{g}(g^{ij}\ \phi_{/ij} - K^2\phi) \tag{5.57}$$

determinando que ellas son de la forma:

$$L = \frac{1}{2}\sqrt{g}(g^{ij}\ \phi_{,i}\ \phi_{,j} + K^2\ \phi^2) + \frac{1}{2}\sqrt{g}\ a =$$

$$= L_2 + \frac{1}{2}\sqrt{g}\ a \tag{5.58}$$

con a constante.

Es facil ver que éstos Lagrangianos verifican que:

$$E^{ij}(L) = E^{ij}(L_2) - \frac{1}{4}\sqrt{g}\ \ g^{ij}\ a \tag{5.59}$$

Demostraremos aquí una especie de recíproca. Vamos a encontrar todos los Lagrangianos L de la forma (5.51) que verifiquen (5.59).

Sea L un Lagrangiano de la forma (5.51). Por el teorema 3.7 existe una función $C^\infty$ f tal que L es de la forma:

$$L = \sqrt{g}\ f(\phi,\psi) \tag{5.60}$$

donde

$$\psi = g^{rs}\ \phi_{,r}\ \phi_{,s}$$

Como queremos encontrar los L que verifiquen (5.59) se debe verificar entonces la ecuación:

$$E^{ij}(\sqrt{g}\ f(\phi,\psi)) = \frac{1}{2}\sqrt{g}(-\frac{1}{2}\ g^{ij}\ g^{rs}\ \phi_{,r}\ \phi_{,s} + g^{ir}\ g^{js}\ \phi_{,r}\ \phi_{,s} -$$

$$- \frac{1}{2}\ \ g^{ij}\ K^2\ \phi^2) - \frac{1}{4}\sqrt{g}\ g^{ij}\ a \tag{5.61}$$

Ahora bien, por (5.53) será:

$$E^{ij}(\sqrt{g}\ f(\phi,\psi)) = -\frac{1}{2}\sqrt{g}\ \ g^{ij}\ f(\phi,\psi) - \sqrt{g}\ \ D_2\ f(\phi,\psi)\ \frac{\partial\psi}{\partial g_{ij}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{g}\; g^{ij} f(\phi,\psi) - \sqrt{g}\; D_2 f(\phi,\psi)\left(-\frac{1}{2}(g^{ri} g^{sj} + g^{si} g^{rj})\,\phi_{,r}\phi_{,s}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{g}\; g^{ij} f(\phi,\psi) + \sqrt{g}\; D_2 f(\phi,\psi)\, g^{ri} g^{sj}\, \phi_{,r}\, \phi_{,s}$$

donde $D_2 f$ indica la derivada parcial de f respecto de su segunda variable. Reemplazando en (5.61) obtenemos que:

$$-\frac{1}{2} g^{ij} f(\phi,\psi) + D_2 f(\phi,\psi)\, g^{ri} g^{sj}\, \phi_{,r}\, \phi_{,s} =$$

$$= -\frac{1}{4}\, g^{ij} g^{rs}\, \phi_{,r}\, \phi_{,s} + \frac{1}{2} g^{ir} g^{js}\, \phi_{,r}\, \phi_{,s} - \frac{1}{4} g^{ij} K^2\, \phi^2 - \frac{1}{4} g^{ij} a$$

de donde será:

$$g^{ij}\left(\frac{1}{2} f(\phi,\psi) - \frac{1}{4}\psi - \frac{1}{4} K^2\, \phi^2 - \frac{1}{4} a\right) +$$

$$+ g^{ir} g^{js}\, \phi_{,r}\, \phi_{,s}\left(\frac{1}{2} - D_2 f(\phi,\psi)\right) = 0$$

Ahora bien, si $(\phi_{,1},\ldots,\phi_{,m}) = 0$ entonces resulta que

$$g^{ij}\left(\frac{1}{2} f(\phi,\psi) - \frac{1}{4}\psi - \frac{1}{4} K^2\, \phi^2 - \frac{1}{4} a\right) = 0 \qquad (5.62)$$

Si en cambio consideramos el abierto V del espacio $m^2+m+1$ dimensional dado por $g_{ij}$ y $\phi_{,i}$ definido por la condición $(\phi_{,1},\ldots,\phi_{,m}) \neq 0$ vamos a probar que los tensores $g^{ij}$ y $g^{ir} g^{js}\, \phi_{,r}\phi_{,s}$ son linealmente independientes en V. En efecto:

Dado un punto de la variedad sabemos que existe un sistema de coordenadas tal que en el punto:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad y \qquad \phi_{,i} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $d \neq 0$. Por lo tanto será:

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} -1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Resulta entonces, usando este sistema de coordenadas, en el punto:

$$g^{ir}\, g^{js}\, \phi_{,r}\, \phi_{,s} = g^{i1}\, g^{j1}\, d^2 = \begin{cases} d^2 & \text{si } i=j=1 \\ 0 & \text{si } i \neq 1 \text{ ó } j \neq 1 \end{cases}$$

Por lo tanto si

$$\lambda g^{ij} + \mu g^{ir}\, g^{js}\, \phi_{,r}\, \phi_{,s} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lambda g^{ij} + \mu g^{i1}\, g^{j1}\, d^2 = 0$$

Tomando $i=j=2$ primero e $i=j=1$ despúes resulta $\lambda = \mu = 0$ y porlo tanto $g^{ij}$ y $g^{ir}\, g^{js}\, \phi_{,r}\, \phi_{,s}$ son linealmente independientes en V. En partícular es válido (5.62), de donde:

$$f(\phi,\psi) = \frac{1}{2}\,(\psi + K^2\, \phi^2 + a) \tag{5.63}$$

(y claramente $D_2 f(\phi,\psi) = \frac{1}{2}$)

Reemplazando entonces en (5.60) será:

$$L = \frac{1}{2}\sqrt{g}\,(\psi + K^2\, \phi^2 + a) = L_2 + \frac{1}{2}\sqrt{g}\, a \tag{5.64}$$

que es exactamente de la forma (5.58) y por lo tanto verifican (5.57). Hemos demostrado entonces el siguiente teorema:

5.3. Teorema

Si L es una densidad Lagrangiana concomitante del tensor métrico $g_{ij}$ y de un escalar $\phi$ y sus primeras derivadas, o sea $L = L(g_{ij};\phi;\phi_{,i})$, y L satisface (5.59), *entonces* L es de la forma:

$$L = \frac{1}{2}\sqrt{g}\,(g^{ij}\,\phi_{,i}\,\phi_{,j} + K^2\,\phi^2) + \frac{1}{2}\sqrt{g}\,a =$$

$$= L_2 + \frac{1}{2}\sqrt{g}\;a.$$

siendo $L_2$ el Lagrangiano dado por (5.50).

Además L verifica que:

$$E(L) = \sqrt{g}\,(g^{ij}\,\phi_{/ij} - K^2\,\phi)$$

Es decir, la elección de un tensor Momento-Energía como el segundo miembro de (5.59) determina la ecuación de Klein-Gordon.

5.4. Corolario

El *único* Lagrangiano del tipo (5.51) que mediante la aplicación de un principio variacional determina la elección de un tensor Momento-Energía como el segundo miembro de (5.56) es el Lagrangiano:

$$L_2 = \frac{1}{2}\sqrt{g}\,(g^{ij}\,\phi_{,i}\,\phi_{,j} + K^2\,\phi^2)$$

# 6. APENDICE I: K-JETS

## 6.1. Introducción

Sean M y P variedades diferenciables de dimensiones m y m+n respectivamente, y sea $\pi:P \to M$ una submersión suryectiva (o sea, una aplicación $C^\infty$ suryectiva tal que su diferencial $\pi_{*p}:P_p \to M_{\pi(p)}$ es epimorfismo $\forall\ p \in P$).

Por ser rg $\pi = m$ (= dim Im$(\pi_*)$) se puede aplicar forma local normal y, por lo tanto, en coordenadas es:

$$\pi(a^1,\ldots,a^{m+n}) = (a^1,\ldots;a^m) \ ,$$

o sea, $\pi$ es la proyección a las primeras m coordenadas (en coordenadas)

Para cada $x \in M$, $\pi^{-1}(x)$ es una subvariedad sumergida de P (no vacía, por ser $\pi$ suryectiva) de dimensión n llamada *fibra en x.*

Una *sección local de* $\pi$ es una aplicación $s:U \to P$, donde U es un abierto de M, tal que $\pi \circ s = id$.

Dado W abierto de M, notaremos con $\Gamma(W,P)$ al conjunto de todas las secciones locales $C^\infty$ de $\pi$ con dominio W, o sea:

$$\Gamma(W,P) = \{s:W \to P/s \text{ es sección } C^\infty \text{ de } \pi\}$$

## 6.2. Proposición

*$\pi$ es abierta.*

Dem.:

Sea W abierto de P. Veamos que $\pi(W)$ es abierto en M. Sea $q = \pi(p) \in \pi(W)$,

$\therefore$ existen $(x,U)$ carta de M alrededor de $q = \pi(p)$ e $(y,V)$ carta de P alrededor de p con $V \subset W$ tales que $\pi(V) \subset U$ y $x \circ \pi \circ y^{-1}(a^1,\ldots,a^{m+n}) = (a^1,\ldots,a^m)$

Luego, $x \circ \pi \circ y^{-1}: y(V) \to x(U)$ es una aplicación abierta, por lo tanto como $\pi(V) = x^{-1}((x \circ \pi \circ y^{-1})(y(V)))$ resulta que $\pi(V)$ es abierto en U y por lo tanto abierto en M. De esto último y del hecho que $q = \pi(p) \in \pi(V) \subset \pi(W)$, hemos encontrado un abierto $\pi(V)$ de M contenido en $\pi(W)$ alrededor de q. De aquí resulta lo afirmado. ///.

6.3. Definición

Sea $k \in \mathbb{N}_o$.

Dos secciones locales $C^\infty$ de $\pi$, $s_1 \in \Gamma(U_1,P)$ y $s_2 \in \Gamma(U_2,P)$ se dirá que están (para $x_o \in U_1 \cap U_2$) $k, x_o$- *relacionadas*, y se lo notará $s_1 \underset{k,x_o}{\sim} s_2$, sii:

*i*) $s_1(x_o) = s_2(x_o)$

*ii*) existen cartas $(x,U)$ de M alrededor de $x_o$ e $(y,V)$ de P alrededor de $s_1(x_o) (= s_2(x_o))$ tales que:

$$\left( \frac{\partial^{|\alpha|} y^i \circ s_1}{\partial x^\alpha} \right)_{x_o} = \left( \frac{\partial^{|\alpha|} y^i \circ s_2}{\partial x^\alpha} \right)_{x_o}$$

$\forall\ 1 \leq i \leq m+n$, $\forall\ \alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\ / |\alpha| = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \leq k$

## 6.4. Observaciones

1. La notación usada en ii) de 6.3. significa:

$$\left(\frac{\partial^{|\alpha|} y^i \circ s_1}{\partial x^\alpha}\right)_{x_o} = \left(\frac{\partial^{|\alpha|} y^i \circ s_1}{\partial (x^1)^{\alpha_1} \ldots \partial (x^m)^{\alpha_m}}\right)_{x_o} =$$

$$= \underbrace{D_1 \circ \ldots \circ D_1}_{\alpha_1} \circ \underbrace{D_2 \circ \ldots \circ D_2}_{\alpha_2} \circ \ldots \circ \underbrace{D_m \circ \ldots \circ D_m}_{\alpha_m} (y^i \circ s_1 \circ x^{-1})(x(x_o))$$

2. La igualdad en ii) de 6.3 se debe verificar en el punto $x_o$; luego para que tenga sentido $y^i \circ s_j \circ x^{-1}$, $j=1,2$, debería ser $U \subset U_1 \cap U_2$ y $s_j(U) \subset V$, $j=1,2$. Como sólo importa el punto $x_o$ bastará con restringir la carta $(x,U)$ de la siguiente forma:

$$(x_{/U \cap s_1^{-1}(V) \cap s_2^{-1}(V)},\ U \cap s_1^{-1}(V) \cap s_2^{-1}(V))$$

3. Es claro que $\widetilde{k,x_o}$ define una relación de equivalencia sobre las secciones locales $C^\infty$ de $\pi$ definidas en un entorno de $x_o$.

4. En otras palabras: $s_1 \ \widetilde{k,x_o}\ s_2$ sii, en coordenadas, las derivadas parciales hasta el orden k de $s_1$ y $s_2$ coinciden en $x_o$.

5. La condición ii) de 6.3 no depende de las cartas locales elegidas.

## 6.5. Definición

Para cada $k \in N_o$ y cada $x \in M$ definimos:

$$P^k(x) = \{s \in \Gamma(W,P) : W \text{ es entorno abierto de } x \text{ en } M\}/_{\widetilde{k,x}}$$

Y $\quad P^k = \bigcup_{x \in M} P^k(x)$

6.6. Proposición

$$P^k(x_1) \cap P^k(x_2) = \phi \quad \forall \; x_1 \neq x_2 \; ; \quad x_1, x_2 \in M.$$

Dem.:

Supongamos que existe $y \in P^k(x_1) \cap P^k(x_2) \underset{6.5}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow$ existen $s_i \in \Gamma(U_i, P)$, $i=1,2$, tales que:

$$y = \overline{s_1}^{k,x_1} = \overline{s_2}^{k,x_2} \qquad (x_i \in U_i, i=1,2)$$

Sea $V$ un entorno abierto de $x_1$ en $M$ tal que $x_2 \notin V$ ($M$ es $T_1$)

Sea $U = U_1 \cap V$ y sea $s = s_{1/U}$

luego, claramente es $\overline{s}^{k,x_1} = \overline{s_1}^{k,x_1} = \overline{s_2}^{k,x_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow s \in \overline{s}_2^{k,x_2} \Rightarrow s \in P^k(x_2) \underset{6.5}{\Rightarrow} x_2 \in U \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 \in V$. Absurdo. ///.

6.7. Definición

Definimos la proyección $\pi^k : P^k \to M$ de la manera natural:

$$\pi^k(y) = x \quad \text{sii} \quad y \in P^k(x)$$

6.8. Observaciones

1. La proyección $\pi^k$ está bien definida gracias a 6.6.
2. $P^k(x) = (\pi^k)^{-1}(x) \quad \forall \; x \in M$

6.9. Definición

Para cada $s \in \Gamma(U,P)$ y cada $k \in N_o$ se define el *k-jet* de $s$ a la aplicación:

$j^k(s): U \to P^k$ dada por:

$j^k(s)(x) = \overline{s}^{k,x}$

6.10. Observaciones

1. $\pi^k \circ j^k(s) = id_U$, por lo tanto $j^k(s)$ es una sección local de $\pi^k$

2. Luego veremos que $P^k$ tiene una estructura de variedad diferenciable con la cual $j^k(s)$ resultará ser $C^\infty$ (o sea, $j^k(s) \in \Gamma(U,P^k)$)

3. $P^k = \{j^k(s)(x) : s \in \Gamma(W,P)$ con $W$ abierto de $M\}$

6.11. Definición

Para $k$ y $\ell \in N_o$ con $k \geq \ell$ se define la *proyección canónica* de los k-jets sobre los $\ell$-jets como la aplicación:

$\pi^k_\ell : P^k \to P^\ell$ dada por:

$\pi^k_\ell (j^k(s)(x)) = j^\ell(s)(x)$

Su buena definición es clara gracias a 3. de 6.10 y 6.6.

6.12. Proposición

$P^o \simeq P$

Dem.:

Sea $f: P^o \to P$ dada por:

$f(j^o(s)(x)) = s(x)$

Claramente $f$ está bien definida

Veamos que f es una biyección.

(1) f es inyectiva:

En efecto, sean $s_i \in \Gamma(U_i,P)$ y $x_i \in U_i$, $i=1,2$ tales que

$$f(j^\circ(s_1)(x_1)) = f(j^\circ(s_2)(x_2)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_1(x_1) = s_2(x_2) \underset{6.1}{\Rightarrow} x_1 = \pi \circ s_1(x_1) = \pi \circ s_2(x_2) = x_2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ ./.

(2) f es suryectiva:

En efecto, sea $p \in P$.

Por ser $\pi$ submersión, usando forma local normal, resulta que existen cartas $(x,U)$ de M alrededor de $\pi(p)$ e $(y,V)$ de P alrededor de p con $\pi(V) \subset U$ tales que:

(*) $x \circ \pi \circ y^{-1}(a^1,\ldots,a^{m+n}) = (a^1,\ldots,a^m)$, $\forall\ (a^1,\ldots,a^{m+n}) \in y(V)$

Notemos $y(p) = (b^1,\ldots,b^m,\ldots,b^{m+n})$.

Sea $i:R^m \to R^{m+n}$ dada por

$$i(c^1,\ldots,c^m) = (c^1,\ldots,c^m,b^{m+1},\ldots,b^{m+n}).$$

Por ser $y(V)$ abierto de $R^{m+n}$ existe $\varepsilon > 0$ y $V_\varepsilon$ entorno abierto alrededor de $y(p)$ dado por $V_\varepsilon = \prod_{j=1}^{m+n} (y^j(p) - \varepsilon, y^j(p) + \varepsilon)$ tal que $V_\varepsilon \subset y(V)$.

Sea $\tilde{V} = y^{-1}(V_\varepsilon)$ y sea $\tilde{U} = \pi(\tilde{V})$. Luego por ser $\pi$ abierta (6.2) $\tilde{U}$ es un abierto de M alrededor de $\pi(p)$ contenido en U (pues $\pi(V) \subset U$).

Además $x(\tilde{U}) = x(\pi(\tilde{V})) = x(\pi(y^{-1}(V_\varepsilon))) =$

$$= (x \circ \pi \circ y^{-1})\ (V_\varepsilon) \underset{(*)}{=} \prod_{j=1}^{m} (y^j(p)-\varepsilon\ ,\ y^j(p)+\varepsilon) =$$

$$= \prod_{j=1}^{m} (b^j-\varepsilon, b^j+\varepsilon)$$

Luego,

$$x(\tilde{U})\ x\ \{(b^{m+1},\ldots,b^{m+n})\} \subset \prod_{j=1}^{m} (b^j-\varepsilon, b^j+\varepsilon)\ x\ \{(b^{m+1},\ldots,b^{m+n})\} \subset$$
$$\subset V_\varepsilon$$

y por lo tanto podemos definir

$s:\tilde{U} \to P$ por:

$s = y^{-1} \circ i \circ x/_{\tilde{U}}$

Luego s es $C^\infty$, y además

$$\pi \circ s = \pi \circ y^{-1} \circ i \circ x = x^{-1} \circ \underbrace{(x \circ \pi \circ y^{-1}) \circ i}_{=\ \mathrm{id(por\ (*))}} \circ x = id$$

de donde $s \in \Gamma(\tilde{U},P)$, con $\tilde{U}$ un entorno abierto de $\pi(p)$ en M, y

$$s(\pi(p)) = y^{-1} \circ i \circ x \circ \pi(p) = y^{-1} \circ i \circ (x \circ \pi \circ y^{-1}) \circ y(p) =$$
$$= y^{-1} \circ i \circ (x \circ \pi \circ y^{-1})\ (b^1,\ldots,b^{m+n}) =$$
$$= y^{-1} \circ i(b^1,\ldots,b^m) = p$$

Sea entonces $j^\circ(s)(\pi(p)) \in P^\circ$

Claramente $f(j^\circ(s)(\pi(p))) = s(\pi(p)) = p$

de donde f es suryectiva ./.

Luego de (1) y (2) f es biyectiva ./// .

6.13. Observaciones

1.- A $P^\circ$ le damos la única estructura diferenciable con la cual f resulta un difeomorfismo. Identificaremos entonces los elementos de $P^\circ$ con los de P y, por lo tanto, $P^\circ$ con P.

2.- La demostración de la suryectividad de f nos brinda varias conclusiones de importancia. La primera es que dado $p \in P$ existe una sección local $C^\infty$ s de $\pi$ definida en algún entorno de $\pi(p)$ tal que $s(\pi(p)) = p$. La segunda es que $P^k(x) \neq \phi$ $\forall\ x \in M$ pues por ser $\pi$ suryectiva vale la conclusión anterior para $x \in M$ y cualquier punto de $\pi^{-1}(x)$.

6.14. Proposición

Las aplicaciones $\pi$, $\pi^k$ y $\pi^k_\ell$ definidas en 6.1, 6.7 y 6.11 respectivamente cumplen las siguientes relaciones:

a) $\pi^\circ = \pi$

b) $\pi^k_k = id_{P^k} \quad \forall\ k \in N_o$

c) $\pi^\ell \circ \pi^k_\ell = \pi^k \quad \forall\ k,\ell \in N_o / \ell \leq k$

d) $\pi^\ell_h \circ \pi^k_\ell = \pi^k_h \quad \forall\ \ell,h,k \in N_o\ /\ h \leq \ell \leq k$

e) $\pi \circ \pi^k_o = \pi^k \quad \forall\ \ k \in N_o$

Dem.:

Para a) y e) debe tenerse en cuenta la observación 6.13-2 y por lo tanto a) y e) significan en realidad $\pi^\circ = \pi \circ f$ y $\pi \circ f \circ \pi^k_o = \pi^k$ respectivamente

La demostración se sigue teniendo en cuenta 6.1, 6.7, 6.11 y 6.12. ///.

6.15. Definición

Una *carta de coordenadas adaptada para* $P$ es una terna $(U,\varphi_o,\varphi)$, donde $U$ es un abierto de $P$ y $\varphi_o:\pi(U)\to R^m$ y $\varphi:U\to R^m\times R^n$ son difeomorfismos que conmutan el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & R^m\times R^n \\ \pi\downarrow & & \downarrow p_1 \\ \pi(U) & \xrightarrow{\varphi_o} & R^m \end{array} \qquad (p_1\circ\varphi = \varphi_o\circ\pi)$$

donde $p_1$ es la proyección sobre el primer factor.

6.16. Observaciones

1. Por 6.2 $\pi(U)$ es un abierto de $M$.
2. $\varphi_o(\pi(U)) = R^m$ y $\varphi(U) = R^m\times R^n$, pues son difeomorfismos.
3. $(\varphi_o,\pi(U))$ y $(\varphi,U)$ son cartas locales de $M$ y $P$ respectivamente tales que $(\pi(U)\subset\pi(U))$:

$$\varphi_o\circ\pi\circ\varphi^{-1}(a^1,..,a^{m+n}) = (a^1,...,a^m),\ \forall\ (a',...,a^{m+n})\in R^m\times R^n$$

O sea, son cartas que dan la forma local normal para $\pi$ con la propiedad de cubrir los $R^{\ell}$ respectivos

6.17. Proposición

Si $p\in P$ *existe* entonces una carta adaptada para $P$,$(U,\varphi_o,\varphi)$, alrededor de $p$ $(p\in U)$.

Dem.:

Por la forma local normal existen cartas $(x,W)$ de $M$ alrededor de $\pi(p)$ e $(y,V)$ de $P$ alrededor de $p$ con $\pi(V) \subset W$ tales que:

$$(*) \qquad x \circ \pi \circ y^{-1}(a^1,\ldots,a^{m+n}) = (a^1,\ldots,a^m),\ \forall (a^1,\ldots,a^{m+n}) \in y(V)$$

Por ser $y(V)$ abierto existe $\varepsilon > 0$ y $V_\varepsilon$ entorno abierto de $y(p)$ dado por $V_\varepsilon = \prod_{i=1}^{m+n} (y^i(p) - \varepsilon,\ y^i(p) + \varepsilon) \subset y(V)$.

Sea $U = y^{-1}(V_\varepsilon)$, luego $U$ es entorno abierto de $p$ en $P$ con $U \subset V$.

Sea $\tilde{W} = \pi(U) \subset W$ (pues $U \subset V$), luego $\tilde{W}$ es entorno abierto de $\pi(p)$ en $M$.

Sean $\tilde{x} = x_{/\tilde{W}}$ e $\tilde{y} = y_{/U}$, luego $(\tilde{x},\tilde{W})$ e $(\tilde{y},U)$ son cartas de $M$ alrededor de $\pi(p)$ y de $P$ alrededor de $p$ respectivamente tales que $\pi(U) \subset W$, para las cuales sigue valiendo $(*)$.

Si notamos $U_\varepsilon = \prod_{i=1}^{m} (y^i(p) - \varepsilon,\ y^i(p) + \varepsilon)$ resulta por $(*)$ que $\tilde{x}(\tilde{W}) = U_\varepsilon$.

Sean entonces:

$f: U_\varepsilon \to R^m$ dada por

$$f(z^1,\ldots,z^m) = \left( \frac{z^1 - y^1(p)}{\varepsilon - |z^1 - y^1(p)|}, \ldots, \frac{z^m - y^m(p)}{\varepsilon - |z^m - y^m(p)|} \right)$$

y

$g: V_\varepsilon \to R^m \times R^n$ dada por

$$g(z^1,\ldots,z^{m+n}) = \left( \frac{z^1 - y^1(p)}{\varepsilon - |z^1 - y^1(p)|}, \ldots, \frac{z^{m+n} - y^{m+n}(p)}{\varepsilon - |z^{m+n} - y^{m+n}(p)|} \right)$$

Luego f y g resultan difeomorfismos (por ejemplo:

$f^{-1}: R^m \to U_\varepsilon$ viene dada por $f^{-1}(a^1,\ldots,a^m)=$

$$= \left( \frac{\varepsilon\, a^1}{1+|a^1|} + y^1(p) \,,\ldots,\, \frac{\varepsilon\, a^m}{1+|a^m|} + y^m(p) \right))$$

Además si $p_1: R^m \times R^n \to R^m$ es la proyección sobre el primer factor, resulta:

$$f \circ p_{1/V_\varepsilon} = p_1 \circ g \quad (**)$$

Sea entonces:

$$\varphi_o = f \circ \tilde{x} : \tilde{W} = \pi(U) \to R^m$$

y

$$\varphi = g \circ \tilde{y} : U \to R^m \times R^n$$

Claramente $\varphi_o$ y $\varphi$ resultan difeomorfismos y por lo tanto $(\varphi_o, \pi(U))$ y $(\varphi, U)$ son cartas de M alrededor de $\pi(p)$ y de P alrededor de p respectivamente tales que

$$\varphi_o(\pi(U)) = R^m \qquad y \qquad \varphi(U) = R^m \times R^n$$

Se afirma entonces que $(U, \varphi_o, \varphi)$ es una carta adaptada para P alrededor de p.

En efecto, por 6.15 bastará con ver la conmutatividad del diagrama, pero:

$$\varphi_o \circ \pi \circ \varphi^{-1} = f \circ \underbrace{\tilde{x} \circ \pi \circ \tilde{y}^{-1}}_{\underset{(*)}{=} p_1} \circ g^{-1} = f \circ p_1 \circ g^{-1} \underset{(**)}{=}$$

$$= p_1 \circ g \circ g^{-1} = p_1$$

o sea: $\varphi_o \circ \pi = p_1 \circ \varphi$ .///.

6.18. Observaciones

1.- Si V es un abierto de P, existe entonces U abierto de P tal que: i) $U \subset V$

ii) U es dominio de una carta adaptada para P, $(U,\varphi_o,\varphi)$.

Por lo tanto se concluye que las cartas adaptadas para P dan una base de la topología de P. (En efecto basta observar que las cartas que dan la forma local normal para $\pi$ son base de la topología de P y que dadas esas cartas una carta adaptada para P se consigue achicando la carta correspondiente a P (Ver 6.17)).

2.- Si $(U,\varphi_o,\varphi)$ es una carta adaptada para P notaremos:

$$\varphi_o = (\varphi_o^1,\ldots,\varphi_o^m)$$

y

$$\varphi = ({}^1\varphi,\ldots,{}^m\varphi,\varphi^1,\ldots,\varphi^n)$$

Con esta notación en mente resulta de 6.15 que:

$$\varphi_o^\alpha\,(\pi(p)) = {}^\alpha\varphi\,(p) \quad , \quad \forall\, 1 \leqslant \alpha \leqslant m,\ \forall\, p \in U$$

Indicaremos:

$${}^\alpha\varphi = t^\alpha \qquad , \quad \forall\, 1 \leqslant \alpha \leqslant m$$

Luego será:

$$t^\alpha = {}^\alpha\varphi = \varphi_o^\alpha \circ \pi \ , \quad \forall\, 1 \leqslant \alpha \leqslant m$$

y por lo tanto:

$$\varphi_o \circ \pi = (t^1,\ldots,t^m)$$

y

$$\varphi = (t^1,\ldots,t^m,\varphi^1,\ldots,\varphi^n)$$

o más brevemente:

$$\varphi_o \circ \pi = t^\alpha$$

y $\varphi = (t^{\alpha}, \varphi^{i})$

Como estamos en el contexto de una carta adaptada podemos identificar, si no existe peligro de confusión, las coordenadas de $\varphi_{o}$ con las $t^{\alpha}$, o sea indicaremos simplemente:

$$\varphi_{o} = t^{\alpha} \quad \text{(en vez de } \varphi_{o} \circ \pi = t^{\alpha}\text{)}$$

3.- Sea $(U, \varphi_{o}, \varphi)$ una carta adaptada para P.

Si $s \in \Gamma(W \subset \pi(U), U)$ resulta:

$$t^{\beta} \circ s = \varphi_{o}^{\beta} \quad , \quad \forall\, 1 \leq \beta \leq m \text{ en } W$$

y

$$\left.\frac{\partial^{|\alpha|}\, {}^{\beta}\varphi \circ s}{\partial \varphi_{o}^{\alpha}}\right|_{x} = \delta^{1}_{|\alpha|} \cdot \delta^{1}_{\alpha_{\beta}} \quad , \quad \forall\ 1 \leq \beta \leq m, \ \forall\ x \in W,$$
$$\forall\, \alpha = (\alpha_{1}, \ldots, \alpha_{m})$$

En efecto:

$$t^{\beta} \circ s = \varphi_{o}^{\beta} \circ \underbrace{\pi \circ s}_{= \text{id}} \overset{}{\underset{6.1}{=}} \varphi_{o}^{\beta}$$

y por lo tanto:

$$\left.\frac{\partial^{|\alpha|}\, {}^{\beta}\varphi \circ s}{\partial \varphi_{o}^{\alpha}}\right|_{x} = \left.\frac{\partial^{|\alpha|}\, \varphi_{o}^{\beta}}{\partial (\varphi_{o}^{1})^{\alpha_1} \ldots \partial (\varphi_{o}^{m})^{\alpha_m}}\right|_{x} = \delta^{1}_{|\alpha|} \cdot \delta^{1}_{\alpha_{\beta}}$$

Se concluye entonces que:

Dadas $s_1 \in \Gamma(U_1, P)$, $s_2 \in \Gamma(U_2, P)$ y $x_o \in U_1 \cap U_2$ resulta que $s_1 \underset{k, x_o}{\sim} s_2$ *sí y sólo si* existe $(U, \varphi_{o}, \varphi)$ carta adaptada para P alrededor de $s_1(x_o)$ tal que:

a) $\varphi^{i} \circ s_1(x_o) = \varphi^{i} \circ s_2(x_o)$ , $\forall\, 1 \leq i \leq n$

b) $$\left.\frac{\partial^{|\alpha|}\varphi^i{}_o\, s_1}{\partial \varphi_o^\alpha}\right|_{x_o} = \left.\frac{\partial^{|\alpha|}\varphi^i{}_o\, s_2}{\partial \varphi_o^\alpha}\right|_{x_o}$$

$$\forall\ 1 \leqslant i \leqslant n\ ,\ \forall\ \alpha = (\alpha_1,..,\alpha_m)\ /|\alpha| \leq k$$

En otras palabras; para ver si dos secciones son equivalentes bastará verificar la igualdad de sus derivadas hasta el orden k de las últimas n coordenadas en alguna carta adaptada (las primeras m coordenadas siempre son iguales).

6.19. Comentario

Sea $k \geqslant 1$. Queremos darle a $P^k$ una estructura de variedad diferenciable.

Sea $(U,\varphi_o,\varphi)$ una carta adaptada para P.

Sea $V_U = (\pi_o^k)^{-1}(U) \subset P^k$

(en realidad deberíamos poner $V_U = (\pi_o^k)^{-1}(f^{-1}(U))$, donde f es la aplicación definida en 6.12 pero tenemos en cuenta 6.13).

Se afirma lo siguiente:

Dado $y \in P^k$;

$y \in V_U$ *si y sólo si* existe W entorno abierto de $\pi^k(y)$ en M y $s \in \Gamma(W,U)$ tal que $y = j^k(s)(\pi^k(y))$.

En efecto:

$\Rightarrow$ ) Como $y \in P^k \underset{6.7}{\Rightarrow} y \in P^k(\pi^k(y)) \underset{6.10}{\Rightarrow} \exists$ V entorno abierto de $\pi^k(y)$ en M y $\tilde{s} \in \Gamma(V,P)$ tal que $y=j^k(\tilde{s})(\pi^k(y))$.

Por otra parte como $y \in V_U \Rightarrow \pi_o^k(y) \in U$.

Pero $\pi_o^k(y) = \pi_o^k(j^k(\tilde{s})(\pi^k(y))) = j^\circ(\tilde{s})(\pi^k(y)) =$

$= \tilde{s}(\pi^k(y))$

Luego $\tilde{s}(\pi^k(y)) \in U$

Sea $W = V \cap \tilde{s}^{-1}(U)$

Luego W es un entorno abierto de $\pi^k(y)$ en M.

Además:

$\tilde{s}(W) \subset U$ (pues $\tilde{s}(V \cap \tilde{s}^{-1}(U)) \subset \tilde{s}(\tilde{s}^{-1}(U))$)

Sea $s = \tilde{s}/_W$

Luego $s \in \Gamma(W,U)$ y claramente

$y = j^k(\tilde{s})(\pi^k(y)) = j^k(s)(\pi^k(y))$ . / .

Se observa además que como $s \in \Gamma(W,U) \Rightarrow$

$\Rightarrow W \subset \pi(U)$ (pues $s(W) \subset U$ y $\pi \circ s = id$)

$\Leftarrow$ ) Recíprocamente

$\pi_o^k(y) = \pi_o^k(j^k(s)(\pi^k(y))) = j^\circ(s)(\pi^k(y)) = s(\pi^k(y)) \in U$.

Luego $y \in (\pi_o^k)^{-1}(U) = V_U$ . ///.

Sea $h = m + n + n \sum_{i=1}^{k} c'_{m,i}$

donde con $c'_{m,i}$ indicamos las combinaciones con repetición de m elementos tomados de a i.

Queremos definir

$$\phi^k : V_U \to R^h$$

Sea $A_U = \{s \in \Gamma(W,U) : W \text{ es abierto de } M\}$.

Por lo observado antes resulta:

$$V_U = \{j^k(s)(x): \; s \in A_U \wedge x \in \text{Dom } s\}$$

Sea $y \in V_U \Rightarrow$ existe $W$ entorno abierto de $\pi^k(y)$ en $M$ y $s \in \Gamma(W,U)$ tal que $y = j^k(s)(\pi^k(y))$. Se definen:

$$s^i = \varphi^i \circ s \circ \varphi_o^{-1} : \varphi_o(W) \subset R^m \to R \quad , \quad \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n$$

$$s^i_\alpha = D_\alpha(s^i) : \varphi_o(W) \subset R^m \to R, \; \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \; \forall\, 1 \leqslant \alpha \leqslant m$$

y en general:

$$s^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_t} = D_{\alpha_t}(D_{\alpha_{t-1}} \ldots (D_{\alpha_1} s^i) \ldots) =$$
$$= D_{\alpha_1 \ldots \alpha_t}(s^i) \; : \varphi_o(W) \subset R^m \to R,$$

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \forall \; 1 \leqslant \alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_t \leqslant m \quad , \quad \forall\, 1 \leqslant t \leqslant k$$

Si $1 \leqslant \alpha_1, \ldots, \alpha_t \leqslant m$ es un conjunto arbitrario de índices asumiremos que:

$$s^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_t} = s^i_{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_t\}} \; ,$$

donde $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_t\}$ significará tomar los índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ en forma creciente.

Definimos entonces:

$$\phi^k(y) = (\varphi_o(x), \; s^i(\varphi_o(x)), \; s^i_\alpha(\varphi_o(x)), \ldots, s^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(\varphi_o(x))),$$

donde $x = \pi^k(y)$.

Por 6.18- 2 y 3 $\varphi_o^\beta(x) = {}^\beta\varphi \circ s(x)$ y como $s^i(\varphi_o(x)) = \varphi^i(s(x))$, entonces las primeras $m+n$ coordenadas de $\phi^k$ resultan ser $\varphi(s(x))$, por lo tanto:

$$\phi^k(y) = \phi^k(j^k(s)(x)) = (\varphi(s(x)), \; s^i_\alpha(\varphi_o(x)), \ldots, s^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(\varphi_o(x)))$$

Por otra parte, por definición:

$$s^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_t}(\varphi_o(x)) = \left.\frac{\partial^t(\varphi^i \circ s)}{\partial\varphi_o^{\alpha_1}\ldots\partial\varphi_o^{\alpha_t}}\right|_x$$

con lo cual podemos escribir:

$$\Phi^k(y) = \Phi^k(j^k(s)(x)) = (\varphi(s(x)), \left.\frac{\partial\ \varphi^i \circ s}{\partial\ \varphi_o^{\alpha}}\right|_x, \ldots, \left.\frac{\partial^k\ \varphi^i \circ s}{\partial\varphi_o^{\alpha_1}\ldots\partial\varphi_o^{\alpha_k}}\right|_x)$$

y por lo tanto por 6.18- 3 la definición de $\Phi^k$ no depende de la sección s elegida. Luego $\Phi^k$ está bien definida.

Veamos entonces que es posible darle una estructura de variedad diferenciable a $P^k$ de tal forma que la familia $\{(\Phi^k, V_U)\}$ correspondiente a cartas adaptadas para P sea un atlas $C^\infty$.

6.20. Proposición

*$P^k$ tiene una estructura de variedad diferenciable,* con la cual $\{(\Phi^k, V_U)\}$ es un atlas $C^\infty$, $\forall\ k \in N_o$.

Dem.:

Sea $k \geqslant 1$

1.- $P^k = \cup V_U$

En efecto:

$$\cup V_U = \cup(\pi_o^k)^{-1}(U) = (\pi_o^k)^{-1}(\cup U) \underset{6.18\text{-}1}{=} (\pi_o^k)^{-1}(P) = P^k$$

2.- $\Phi^k: V_U \to R^h$ es biyectiva

En efecto:

Calculemos $(\Phi^k)^{-1}: R^h \to V_U$

Sea $(\underbrace{a^1,\ldots,a^m}_{a}, \underbrace{b^1,\ldots,b^n}_{b}, b^i_\alpha,\ldots, b^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k}) \in R^h$

Sea $f: R^m \to R^{m+n}$ $C^\infty$

$$f = (f^1,\ldots,f^m,f^{m+1},\ldots,f^{m+n}) = (f^\alpha, f^i)$$

tal que:

i) $f^\alpha$ = proyección a la $\alpha$-ésima coordenada , $\forall\ 1 \leq \alpha \leq m$

ii) $f^i(a) = b^{i-m}$ , $\forall\ m+1 \leq i \leq m+n$

iii) $D_{\alpha_1\ldots\alpha_r}(f^i)(a) = b^{i-m}_{\alpha_1\ldots\alpha_r}$ , $\forall\ m+1 \leq i \leq m+n$ , $\forall\ 1 \leq r \leq k$

Es fácil ver que una tal $f$ $C^\infty$ siempre existe.

Recordemos que tenemos una carta adaptada $(U,\varphi_o,\varphi)$ para P.

Sea entonces:

$$s = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi_o : \pi(U) \to U$$

Luego $s$ es $C^\infty$ y además:

$$\pi \circ s = \pi \circ \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi_o \underset{6.15}{=} \varphi_o^{-1} \circ \underbrace{p_1 \circ f}_{\substack{=id \\ i)}} \circ \varphi_o = id$$

Luego $s \in \Gamma(\pi(U),U)$.

Definimos entonces:

$$(\Phi^k)^{-1}(a,b,b^i_\alpha,\ldots,b^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k}) = j^k(s)(\varphi_o^{-1}(a))$$

(a) - $(\Phi^k)^{-1}$ está bien definida:

En efecto:

Si $\tilde f: R^m \to R^{m+n}$ es otra función $C^\infty$ verificando i), ii), e iii) y $\tilde s = \varphi^{-1} \circ \tilde f \circ \varphi_o$ , entonces:

$$s(\varphi_o^{-1}(a)) = \varphi^{-1}(f(a)) = \varphi^{-1}(b) = \varphi^{-1}(\tilde f(a)) = \tilde s(\varphi_o^{-1}(a))$$

y

$$\left.\frac{\partial^r \varphi^i \circ s}{\partial \varphi_o^{\alpha_1} \ldots \partial \varphi_o^{\alpha_r}}\right|_{\varphi_o^{-1}(a)} = D_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}(\varphi^i \circ s \circ \varphi_o^{-1})\,(a) =$$

$$= D_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}(\varphi^i \circ \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi_o \circ \varphi_o^{-1})(a) \underset{6.18-2}{=}$$

$$= D_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}(f^{m+i})(a) =$$

$$= D_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}(\tilde{f}^{m+i})(a) = \left.\frac{\partial^r \varphi^i \circ \tilde{s}}{\partial \varphi_o^{\alpha_1} \ldots \partial \varphi_o^{\alpha_r}}\right|_{\varphi_o^{-1}(a)}$$

Luego, por 6.18-3, $s \underset{k,\varphi_o^{-1}(a)}{\frown} \tilde{s} \Rightarrow j^k(s)(\varphi_o^{-1}(a)) = j^k(\tilde{s})(\varphi_o^{-1}(a))$ ./.

(b) - $\Phi^k \circ (\Phi^k)^{-1} = id_{R^h}$ y $(\Phi^k)^{-1} \circ \Phi^k = id_{V_U}$:

Esto es trivial a partir de las definiciones de $\Phi^k$ y $(\Phi^k)^{-1}$. .//.
Luego $\Phi^k$ es biyectiva -//-

3.- $\Phi^k(V_U \cap V_{\tilde{U}})$ es un abierto de $R^h$

En efecto:

Veamos que $\Phi^k(V_U \cap V_{\tilde{U}}) = \varphi(U \cap \tilde{U}) \times R^{h-m-n}$

c) Sea $(a,b,b^i_\alpha,\ldots,b^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k}) \in \Phi^k(V_U \cap V_{\tilde{U}}) \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,b,b^i_\alpha,\ldots,b^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k}) \in \Phi^k((\pi_o^k)^{-1}(U \cap \tilde{U})) \underset{6.19}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow$ existe W entorno abierto en M y $s \in \Gamma(W, U \cap \tilde{U})$ tal que

$\Phi^k(j^k(s)(x)) = (a,b,b^i_\alpha,\ldots,b^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k})$, para algún $x \in W \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,b) = \varphi(s(x)) \in \varphi(U \cap \tilde{U})$, pues $s(x) \in U \cap \tilde{U}$. $\underset{6.19}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow (a,b,b^i_\alpha,\ldots, b^i_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}) \in \varphi(U \cap \tilde{U}) \times R^{h-m-n}$ -/-

$\supset$) Sea $(a,b,b^i_\alpha,\ldots,b^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k}) \in \varphi(U \cap \tilde{U}) \times R^{h-m-n} \subset R^h \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,b) \in \varphi(U \cap \tilde{U}) \Rightarrow \exists p \in U \cap \tilde{U}$ tal que $(a,b) = \varphi(p) \Rightarrow$

$\Rightarrow a = p_1(\varphi(p)) \underset{6.15}{=} \varphi_o(\pi(p)) \Rightarrow a \in \varphi_o(\pi(U \cap \tilde{U}))$

Sea $f: R^m \to R^{m+n}$ $C^\infty$ la aplicación definida en 2.

Sea $W = \varphi_o(\pi(U \cap \tilde{U})) \cap f^{-1}(\varphi(U \cap \tilde{U}))$

Luego $W$ es un abierto de $R^m$, $f(W) \subset \varphi(U \cap \tilde{U})$ y $a \in W$. Luego $\varphi_o^{-1}(W)$ es un abierto de $M$.

Sea $s = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi_o$ la sección dada en 2.- y sea $\tilde{s} = s/_{\varphi_o^{-1}(W)}$.

Claramente $\tilde{s} \in \Gamma(\varphi_o^{-1}(W), U \cap \tilde{U})$, pues $f(W) \subset \varphi(U \cap \tilde{U})$. Como $\varphi_o^{-1}(a) \in \varphi_o^{-1}(W)$, pues $a \in W$, resulta:

$$j^k(\tilde{s})(\varphi_o^{-1}(a)) = j^k(s)(\varphi_o^{-1}(a)).$$

Luego:

$$(\Phi^k)^{-1}(a,b,b^i_\alpha,\ldots,b^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k}) = j^k(\tilde{s})(\varphi_o^{-1}(a)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a,b,b^i_\alpha,\ldots,b^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k}) = \Phi^k(j^k(\tilde{s})(\varphi_o^{-1}(a)))$$

Pero como:

$$\pi^k_o(j^k(\tilde{s})(\varphi_o^{-1}(a))) = j^o(\tilde{s})(\varphi_o^{-1}(a)) \underset{6.12}{=} \tilde{s}(\varphi_o^{-1}(a)) =$$

$= \varphi^{-1}(f(a)) = \varphi^{-1}(a,b) \in U \cap \tilde{U}$, pues $f(a) = (a,b) \in \varphi(U \cap \tilde{U})$. Resulta entonces que:

$$j^k(\tilde{s})\ (\varphi_o^{-1}(a)) \in (\pi^k_o)^{-1}(U \cap \tilde{U}) = (\pi^k_o)^{-1}(U) \cap (\pi^k_o)^{-1}(\tilde{U}) =$$

$$= V_U \cap V_{\tilde{U}}$$

Luego $(a,b,b^i_\alpha,\ldots,b^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k}) \in \Phi^k(V_U \cap V_{\tilde{U}})$ ./.

Como $\varphi$ es un difeomorfismo, se concluye lo afirmado.//.

4.- $\tilde{\Phi}^k \circ (\Phi^k)^{-1}: \Phi^k(V_U \cap V_{\tilde{U}}) \to \tilde{\Phi}^k(V_U \cap V_{\tilde{U}})$ es $C^\infty$.

Sea $(a,b,b^i_\alpha,..,b^i_{\alpha_1,...,\alpha_k}) \in \Phi^k(V_U \cap V_{\tilde{U}})$.

Si $\tilde{s}$ es la sección dada en 3- resultado:

$$(\tilde{\Phi}^k \circ (\Phi^k)^{-1})(a,b,b^i_\alpha,..,b^i_{\alpha_1...\alpha_k}) = \tilde{\Phi}^k(j^k(\tilde{s})(\varphi_o^{-1})(a))) \underset{5.19}{=}$$

$$=(\tilde{\varphi}\ (\tilde{s}(\varphi_o^{-1}(a))), \frac{\partial\ \tilde{\varphi}^i \circ \tilde{s}}{\partial\ \tilde{\varphi}_o^\alpha}/_{\varphi_o^{-1}(a)}, ..., \frac{\partial^k\ \tilde{\varphi}^i \circ \tilde{s}}{\partial \tilde{\varphi}_o^{\alpha_1} ... \partial \tilde{\varphi}_o^{\alpha_k}}/_{\varphi_o^{-1}(a)})$$

Bastará entonces observar que las funciones "coordenadas" de $\tilde{\Phi}^k \circ (\Phi^k)^{-1}$ son $C^\infty$ como función de las variables $a,b,b^i_\alpha,..,b^i_{\alpha_1...\alpha_k}$

En efecto:

$$\tilde{\varphi}(\tilde{s}(\varphi_o^{-1}(a))) = (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})(f(a)) = (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})(a,b).$$

Por otra parte:

$$\frac{\tilde{\varphi}^i \circ \tilde{s}}{\partial\ \tilde{\varphi}_o^\alpha}/_{\varphi_o^{-1}(a)} = \tilde{s}^i_\alpha\ (\tilde{\varphi}_o(\varphi_o^{-1}(a))) = D_\alpha(\tilde{s}^i) \circ (\tilde{\varphi}_o \circ \varphi_o^{-1})(a) =$$

$$= D_\alpha\ (\tilde{\varphi}^i \circ \tilde{s} \circ \tilde{\varphi}_o^{-1}) \circ (\tilde{\varphi}_o \circ \varphi_o^{-1})\ (a) =$$

$$= D_\alpha(\tilde{\varphi}^i \circ \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi_o \circ \tilde{\varphi}_o^{-1}) \circ (\tilde{\varphi}_o \circ \varphi_o^{-1})\ (a) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m+n} \sum_{\beta=1}^{m} D_j(\tilde{\varphi}^i \circ \varphi^{-1}) \circ f(a).\ D_\beta(f^j)(a).\ D_\alpha(\varphi_o^\beta \circ \tilde{\varphi}_o^{-1}) \circ (\tilde{\varphi}_o \circ \varphi_o^{-1})(a)$$

Pero $f(a) = (a,b)$ y $D_\beta(f^j)(a) = \begin{cases} \delta^j_\beta & \text{si} \quad 1 \leq j \leq m \\ b^{j-m}_\beta & \text{si} \quad m+1 \leq j \leq m+n \end{cases}$

Luego:

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}^i \circ \tilde{s}}{\partial \tilde{\varphi}_o^\alpha} \Big/ \varphi_o^{-1}(a) = \sum_{\beta=1}^{m} D_\beta(\tilde{\varphi}^i \circ \varphi^{-1})(a,b) . D_\alpha(\varphi_o^\beta \circ \tilde{\varphi}_o^{-1}) \circ (\tilde{\varphi}_o \circ \varphi_o^{-1})(a) +$$

$$+ \sum_{\beta=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{m+n} D_j(\tilde{\varphi}^i \circ \varphi^{-1})(a,b) .\ b_\beta^{j-m} .$$

$$. D_\alpha(\varphi_o^\beta \circ \tilde{\varphi}_o^{-1}) \circ (\tilde{\varphi}_o \circ \varphi_o^{-1})(a)$$

En general será:

$$\frac{\partial^r \tilde{\varphi}^i \circ \tilde{s}}{\partial \tilde{\varphi}_o^{\alpha_1} \ldots \partial \tilde{\varphi}_o^{\alpha_r}} \Big/ \varphi_o^{-1}(a) = (D_{\alpha_r} \ldots D_{\alpha_1}(\tilde{\varphi}^i \circ \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi_o \circ \tilde{\varphi}_o^{-1})) \circ (\tilde{\varphi}_o \circ \varphi_o^{-1})(a)$$

$$= D_{\alpha_r} \ldots D_{\alpha_2} \underbrace{\left( \sum_{j=1}^{m+n} \sum_{\beta=1}^{m} D_j(\tilde{\varphi}^i \circ \varphi^{-1}) \circ f .\ D_\beta(f^j) . D_\alpha(\varphi_o^\beta \circ \varphi_o^{-1}) \right) \circ}_{(*)}$$

$$\circ\ (\tilde{\varphi}_o \circ \varphi_o^{-1})(a)$$

Observemos que al derivar (*) respecto de $\alpha_2, \ldots, \alpha_r$ aparecerán términos de la forma:

i) $D_{i_1} \ldots D_{i_\ell} (\tilde{\varphi}^i \circ \varphi^{-1})(f(a))$

ii) $D_{\beta_1} \ldots D_{\beta_\ell} (f^j)(a)$

iii) $D_{\alpha_1} \ldots D_{\alpha_\ell} (\varphi_o^\beta \circ \tilde{\varphi}_o^{-1}) \circ (\tilde{\varphi}_o \circ \varphi_o^{-1})(a)$

multiplicados y sumados entre sí.

Claramente los del tipo i) y iii) son $C^\infty$ como función de las variables $a, b, b_\alpha^i, \ldots, b_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}^i$. Para los términos del tipo ii) basta observar que para $\ell \geq 2$ (el caso $\ell = 1$ ya fue analizado):

$$D_{\beta_1 \ldots \beta_\ell}(f^j)(a) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 1 \leq j \leq m \\ b_{\beta_1 \ldots \beta_\ell}^{j-m} & \text{si} \quad m+1 \leq j \leq m+n \end{cases}$$

que es claramente $C^\infty$. Resulta entonces lo afirmado.//.-

En conclusión, de 1,2,3,y 4, resulta que existe sobre $P^k$ una estructura de variedad diferenciable, única, tal que la familia $\{(\Phi^k, V_U)\}$, correspondiente a cartas adaptadas para P, es un atlas $C^\infty$. Lo que no nos asegura lo anterior es que, con esta estructura, $P^k$ sea una variedad $T_2$ y $N_2$. Veamos esto:

5. $P^k$ es $N_2$

Por ser P una variedad $N_2$ y 6.18-1 podemos conseguir una familia numerable $\{(U_i, \varphi_{o_i}, \varphi_i)\}_{i\in N}$ de cartas adaptadas para P correspondiente a un atlas numerable $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in \mathbb{N}}$ de P. Por lo tanto (de 1.-) la familia $\{(V_{U_i}, \Phi_i^k)\}_{i\in \mathbb{N}}$ es un atlas numerable de $P^k$. Luego $P^k$ es $N_2$.-//-

6. $P^k$ es $T_2$

Sean $y_1, y_2 \in P^k$ tales que $y_1 \neq y_2$.

a) Sup. $\pi_o^k(y_1) \neq \pi_o^k(y_2)$

Sean $(U_1, \varphi_{o_1}, \varphi_1)$ y $(U_2, \varphi_{o_2}, \varphi_2)$ cartas adaptadas para P tales que $\pi_o^k(y_i) \in U_i$, i=1,2 y $U_1 \cap U_2 = \phi$ (esto siempre se puede conseguir pues P es $T_2$ y 6.18-1).

Luego $V_{U_i} = (\pi_o^k)^{-1}(U_i)$ son entornos abiertos de $y_i$, i=1,2 tales que $V_{U_1} \cap V_{U_2} = \phi$ -/ -

b) Sup. $\pi_o^k(y_1) = \pi_o^k(y_2)$.

Existe entonces $(U, \varphi_o, \varphi)$ carta adaptada para P alrededor de $\pi_o^k(y_1) = \pi_o^k(y_2) \Rightarrow y_1, y_2 \in V_U$

Sean $W_1$ y $W_2$ entornos abiertos de $\Phi^k(y_1)$ y $\Phi^k(y_2)$ en $\mathbb{R}^h$ tales que $W_1 \cap W_2 = \phi$ (siempre es posible conseguir esto pues $\mathbb{R}^h$ es $T_2$ y $\Phi^k(y_1) \neq \Phi^k(y_2)$ pues $\Phi^k$ es biyectiva).

Luego $(\Phi^k)^{-1}(W_i)$, i=1,2, son entornos abiertos de $y_i$ en $V_U$, luego abiertos en $P^k$ tales que:

$(\Phi^k)^{-1}(W_1) \cap (\Phi^k)^{-1}(W_2) = (\Phi^k)^{-1}(W_1 \cap W_2) = \phi$ -/-

Luego de a) y b) $P^k$ es $T_2$-//-

Basta observar por último que si k=0, por 6.13-1, $P^\circ$ tiene una estructura diferenciable con la cual $\{(\Phi^\circ, V_U)\}$ es un atlas $C^\infty$. Observemos que en este caso es $\Phi^\circ \simeq \varphi$ y $V_U \simeq U$ -///-

6.21. Notación

Sea $(\Phi^k, V_U)$ una carta de $P^k$ correspondiente a una carta adaptada para P, $(U, \varphi_o, \varphi)$.

Queremos darle nombres a las funciones coordenadas de $\Phi^k$. Teniendo en cuenta 6.18-2 notaremos:

$$\varphi_o = (t^1, \ldots, t^m)$$

o sea: $\varphi_o^\alpha = t^\alpha \qquad , \forall\ 1 \leq \alpha \leq m$

$$\varphi = (t', \ldots, t^m, x^1, \ldots, x^n)$$

o sea: $\begin{cases} {}^\alpha\varphi = t^\alpha & , \forall\ 1 \leq \alpha \leq m \\ \varphi^i = x^i & , \forall\ 1 \leq i \leq n \end{cases}$

Recordemos que las $t^\alpha$ de $\varphi_o$ *no* son las mismas que las de $\varphi$, si por un momento indicamos $\tilde{t}^\alpha = \varphi_o^\alpha$ se cumple la relación $t^\alpha = \tilde{t}^\alpha \circ \pi$.

Por analogía notamos:

$$\Phi^k = (t^\alpha, x^i, x^i_\alpha, \ldots, x^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_k})$$

donde:

$$t^\alpha(j^k(s)(x)) = \varphi_o(x) = t^\alpha(x) = t^\alpha(s(x)), \quad \forall\ 1 \leq \alpha \leq m$$

$$x^i(j^k(s)(x)) = s^i(\varphi_o(x)) = x^i(s(x)) \quad , \quad \forall\ 1 \leq i \leq n$$

$$x^i_\alpha(j^k(s)(x)) = s^i_\alpha(\varphi_o(x)) = s^i_\alpha(t^1(x),..,t^m(x)),\ \forall\ 1\leq i\leq n,\ \forall\ 1\leq \alpha\leq m$$

y en general

$$x^i_{\alpha_1...\alpha_r}(j^k(s)(x)) = s^i_{\alpha_1..\alpha_r}(\varphi_o(x)) = s^i_{\alpha_1....\alpha_r}(t^1(x),...,t^m(x)),$$
$$\forall\ 1\leq i\leq n,\ \forall\ 1\leq\alpha_1,...,\alpha_r\leq m$$

Recalcamos que aunque estamos usando la misma notación para ciertas funciones coordenadas de $\varphi_o,\varphi$ y $\Phi^k$, éstas *no* son iguales (pues claramente parten de distintos conjuntos), pero indicando los puntos correctamente (los únicos posibles) entonces esas funciones ($t^\alpha$ y $x^i$) toman los mismos valores.

6.22. Observaciones

1.- Si $s\in\Gamma(W,P)$, *entonces* $j^k(s)\in\Gamma(W,P^k)$. En efecto:

Por 6.10-1 sabemos que $j^k(s)$ es una sección de $\pi^k$. Bastará entonces ver que $j^k(s):W\to P^k$ es $C^\infty$.

Sea $x\in W \Rightarrow s(x)\in P$.

Sea $(U,\varphi_o,\varphi)$ una carta adaptada para P alrededor de s(x). Sea:

$$\tilde{W} = s^{-1}(U)$$

Luego $\tilde{W}$ es un entorno abierto de x en M tal que $\tilde{W}\subset W$ y $s(\tilde{W})\subset U$.

Luego, $\forall\ z\in\tilde{W}$ resulta:

$$\pi^k_o(j^k(s)(z)) = j^o(s)(z) = s(z)\in U$$

y por lo tanto:

$$j^k(s)(\tilde{W})\subset V_U$$

Luego las cartas $(\varphi_o,\tilde{W})$ de M alrededor de x y $(\Phi^k,V_U)$ de $P^k$ alrededor de $j^k(s)(x)$ son tales que $j^k(s)(\tilde{W})\subset V_U$, y además:

$$\Phi^k \circ j^k(s) \circ \varphi_o^{-1}(t^1,\dots,t^m) =$$

$$= (t^1,\dots,t^m, s^i(t^1,\dots,t^m), s^i_\alpha(t^1,\dots,t^m),\dots,s^i_{\alpha_1\dots\alpha_k}(t^1,\dots,t^m))$$

es claramente $C^\infty$.-//-

2.- Si $s_i \in \Gamma(W_i,P)$, $i=1,2$, son tales que $s_1 \underset{k,x}{\sim} s_2$ $\forall\ x \in W_1 \cap W_2$, *entonces* $j^k(s_1) = j^k(s_2)$. La demostración es trivial-//-

# 7. APENDICE II

El propósito de este apéndice es analizar en detalle ciertos aspectos de la teoría de los k-jets (vista en el Apéndice I) en el caso particular que nuestro contexto sea el detallado en 2.1 de la Sección 2.

Sin pérdida de generalidad y para no aumentar la ya complicada notación supondremos que en 2.1 c=1 y notaremos entonces $r_1=r$ y $s_1=s$. En este caso (2.1) y (2.2) se convierten en:

$$P = \bigcup_{p\in M} T^r_s(M_p) = T^r_s(M) \quad , \; n=m^{(r+s)} \tag{7.1}$$

Como en 2.1 consideramos $p\in M$ y $(x,U)$ una carta local de M alrededor de p tal que $x(U) = \mathbb{R}^m$. Sea $(\tilde{x},U)$ otra carta local de M con $\tilde{x}(U) = \mathbb{R}^m$.

Nuestra intención es describir la aplicación $\psi^k_p(\tilde{x})$. Para ello es necesario conocer el comportamiento de la aplicación $\tilde{\phi}^k$ o $(\phi^k)^{-1}$. Recordemos (ver 6.19) que las cartas $(\phi^k,V_U)$ de $P^k$ se conseguían partiendo de cartas adaptadas, $(U,\varphi_o,\varphi)$, para P. En nuestro contexto actual, dado por (7.1), las cartas $(x,U)$ y $(\tilde{x},U)$ nos determinan dos cartas $(\phi^k,V_U)$ y $(\tilde{\phi}^k,V_U)$ de $P^k$ a partir de las cartas adaptadas $(\pi^{-1}(U),t_U,x)$ y $(\pi^{-1}(U),\tilde{t}_U,\tilde{x})$ correspondientes. Recordemos también que en 6.20 para definir $(\phi^k)^{-1}$ nos valíamos de una cierta función auxiliar f. Para no confundir dicha función con la definida en el Lema 2.2 aquí la llamaremos $\theta$.

Cada elemento de $\mathbb{R}^h$ es de la forma:

$$(a,b) = (a^1,\dots,a^m, b^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}, b^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s\alpha},\dots, b^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_r\,\alpha_1\dots\alpha_k})$$

Luego para $(a,b) \in \mathbb{R}^h$ definíamos:

$$\Theta : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n} \qquad C^\infty$$

$$\Theta = (\Theta^1,\dots,\Theta^m,\Theta^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}) \text{ tal que:}$$

i) $\Theta^i$ = proyección a la i-ésima coordenada, $\forall\ 1 \leq i \leq m$

ii) $\Theta^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}(a) = b^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}$

iii) $D_{\alpha_1\dots\alpha_r}(\Theta^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}) = b^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s\,\alpha_1\dots\alpha_r}$, $\forall\ 1 \leq r \leq k$

Resulta entonces, reemplazando en 6.20-4 todo lo necesario que:

$$\tilde{\phi}^k \circ (\phi^k)^{-1}(a,b) = ((\tilde{t}_U \circ t_U^{-1})(a,b),$$

$$(1) \qquad D_\alpha((\tilde{t}_U)^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} \circ t_U^{-1} \circ \Theta \circ x \circ \tilde{x}^{-1}) \circ (\tilde{x} \circ x^{-1})(a),\dots,$$

$$D_{\alpha_1\dots\alpha_k}((\tilde{t}_U)^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} \circ t_U^{-1} \circ \Theta \circ x \circ \tilde{x}^{-1}) \circ (\tilde{x} \circ x^{-1})(a))$$

Ahora bien, es conocido (y fácil de ver)que:

$$(2) \qquad \tilde{t}_U \circ t_U^{-1}(a,b) = ((\tilde{x} \circ x^{-1})(a),\ \tilde{b}^{h_1\dots h_r}_{k_1\dots k_s})$$

donde, $\tilde{b}^{h_1\dots h_r}_{k_1\dots k_s} = A^{h_1}_{i_1}(x^{-1}(a))\dots A^{h_r}_{i_r}(x^{-1}(a)).B^{j_1}_{k_1}(x^{-1}(a))\dots$

$\dots B^{j_s}_{k_s}(x^{-1}(a))\ b^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}$ y donde $A^i_j = \partial\tilde{x}^i/\partial x^j$ y $B^i_j = \partial x^i/\partial\tilde{x}^j$

Por otra parte por 6.20-4:

$$D_\alpha(\tilde{t}_U)^{h_1\dots h_r}_{k_1\dots k_s} \circ t_U^{-1} \circ \Theta \circ x \circ \tilde{x}^{-1}) \circ (\tilde{x} \circ x^{-1})(a) =$$

$$(3) \qquad = \sum_{i=1}^{m} D_i((\tilde{t}_U)^{h_1\dots h_r}_{k_1\dots k_s} \circ t_U^{-1})(a,b).\ D_\alpha(x^i \circ \tilde{x}^{-1}) \circ (\tilde{x} \circ x^{-1})(a) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \sum_J D_J((\tilde{t}_U)^{h_1\dots h_r}_{k_1\dots k_s} \circ t_U^{-1})(a,b).\ b^J_i\ D_\alpha(x^i \circ \tilde{x}^{-1}) \circ (\tilde{x} \circ x^{-1})(a).$$

donde con J indicamos todas las coordenadas posibles $\binom{i_1\ldots i_r}{j_1\ldots j_s}$ de $\mathbb{R}^n$.

Ahora bien:

$$(\tilde{t}_U)^{h_1\ldots h_r}_{k_1\ldots k_s} \circ t_U^{-1}(c,d) = (A^{h_1}_{i_1} \circ x^{-1})(c)\ldots(A^{h_r}_{i_r} \circ x^{-1})(c)(B^{j_1}_{k_1} \circ x^{-1})(c)\ldots$$

$$\ldots(B^{j_s}_{k_s} \circ x^{-1})(c)d^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$$

Luego será:

$$D_i((\tilde{t}_U)^{h_1\ldots h_r}_{k_1\ldots k_s} \circ t_U^{-1})(a,b) = \{[A^{h_1}_{i_1 i}(x^{-1}(a))\ldots A^{h_r}_{i_r}(x^{-1}(a))+\ldots$$

(4) $$\ldots+A^{h_1}_{i_1}(x^{-1}(a))\ldots A^{h_r}_{i_r i}(x^{-1}(a))] \,.$$

$$.\, B^{j_1}_{k_1}(x^{-1}(a))\ldots B^{j_s}_{k_s}(x^{-1}(a)) + A^{h_1}_{i_1}(x^{-1}(a))\ldots A^{h_r}_{i_r}(x^{-1}(a))[B^{j_1}_{k_1 j}(x^{-1}(a))\ldots$$

$$\ldots B^{j_s}_{k_s}(x^{-1}(a)) + \ldots + B^{j_1}_{k_1}(x^{-1}(a))\ldots B^{j_s}_{k_s j}(x^{-1}(a))]\, A^j_i(x^{-1}(a))\}\ b^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$$

y dado $J = \binom{i_1\ldots i_r}{j_1\ldots j_s}$ será:

(5) $$D_J((\tilde{t}_U)^{h_1\ldots h_r}_{k_1\ldots k_s} \circ t_U^{-1})\ (a,b) = A^{h_1}_{i_1}(x^{-1}(a))\ldots A^{h_r}_{i_r}(x^{-1}(a))B^{j_1}_{k_1}(x^{-1}(a))\ldots$$

$$\ldots B^{j_s}_{k_s}(x^{-1}(a)).$$

Además

(6) $$D_\alpha(x^i \circ \tilde{x}^{-1})((\tilde{x} \circ x^{-1})(a)) = B^i_\alpha\ (x^{-1}(a))$$

Por último, reemplazando (4), (5) y (6) en (3) y teniendo en cuenta que $A^i_j\ B^j_r = \delta^i_r$ resulta que:

$$D_\alpha((\tilde{t}_U)^{h_1\ldots h_r}_{k_1\ldots k_s} \circ t_U^{-1} \circ \Theta \circ x \circ \tilde{x}^{-1}) \circ (\tilde{x} \circ x^{-1})(a) =$$

$$= \{[A^{h_1}_{i_1 i} \ldots A^{h_r}_{i_r} + \ldots + A^{h_1}_{i_1} \ldots A^{h_r}_{i_r i}]\; B^i_\alpha B^{j_1}_{k_1} \ldots B^{j_s}_{k_s} +$$

$$+ A^{h_1}_{i_1} \ldots A^{h_r}_{i_r} [B^{j_1}_{k_1 \alpha} \ldots B^{j_s}_{k_s} + \ldots + B^{j_1}_{k_1} \ldots B^{j_s}_{k_s \alpha}]\}(x^{-1}(a))\; b^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} +$$

$$+ \{A^{h_1}_{i_1} \ldots A^{h_r}_{i_r} B^{j_1}_{k_1} \ldots B^{j_s}_{k_s} B^i_\alpha\}_{(x^{-1}(a))}\; b^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s i}$$

Es claro que si notamos con $\tilde{b}^{h_1\ldots h_r}_{k_1\ldots k_s}$ al primer término de esta igualdad y pensamos a los $b^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$ como las componentes de un tensor de tipo $(r,s)$, dicha igualdad resulta ser el cambio de coordenadas del "tensor" de la carta $(x,U)$ a la carta $(\tilde{x},U)$.

Es claro de aquí que realizando un trabajo similar, aunque mucho más engorroso, con las restantes coordenadas de $\tilde{\phi}^k \circ (\phi^k)^{-1}$ éstas serán elementos de la forma:

$$\tilde{b}^{h_1\ldots h_r}_{k_1\ldots k_s\, \alpha_1\ldots\alpha_t}$$

donde su expresión vendrá dada considerando $b^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$ como las componentes de un tensor de tipo $(r,s)$ y calculando formalmente el cambio de coordenadas de la carta $(x,U)$ a la carta $(\tilde{x},U)$ de las derivadas de orden $t$.

Por lo tanto concluímos que:

$$\tilde{\phi}^k \circ (\phi^k)^{-1}(a,b) = ((\tilde{x} \circ x^{-1})(a),\; \tilde{b}^{h_1\ldots h_r}_{k_1\ldots k_s},\; \tilde{b}^{h_1\ldots h_r}_{k_1\ldots k_s \beta}, \ldots$$
$$\ldots,\; \tilde{b}^{h_1\ldots h_r}_{k_1\ldots k_s\, \beta_1\ldots\beta_k}) \tag{7.2}$$

Y entonces:

$$\psi_p^k(\tilde{x})\ (b_{j_1\dots j_s}^{i_1\dots i_r}, b_{j_1\dots j_s\alpha}^{i_1\dots i_r}, \dots, b_{j_1\dots j_s\alpha_1\dots\alpha_k}^{i_1\dots i_r}) =$$

$$= (\tilde{x}(p), \tilde{b}_{k_1\dots k_s}^{h_1\dots h_r}, \tilde{b}_{k_1\dots k_s\beta}^{h_1\dots h_r}, \dots, \tilde{b}_{k_1\dots k_s\beta_1\dots\beta_k}^{h_1\dots h_r}) \tag{7.3}$$

y $$H^k(\mathbb{C}, b) = (\tilde{b}_{k_1\dots k_s}^{h_1\dots h_r}, \tilde{b}_{k_1\dots k_s\beta}^{h_1\dots h_r}, \dots, \tilde{b}_{k_1\dots k_s\beta_1\dots\beta_k}^{h_1\dots h_r}) \tag{7.4}$$

Es fácil ver a partir de (7.3) que si $(\tilde{x},U)$ y $(\tilde{\tilde{x}},U)$ son dos cartas con $\tilde{x}(U) = \tilde{\tilde{x}}(U) = \mathbb{R}^m$ tales que $\psi_p^k(\tilde{x}) = \psi_p^k(\tilde{\tilde{x}})$ entonces:

$$f(\psi_p^k(\tilde{x})) = f(\psi_p^k(\tilde{\tilde{x}})),$$

donde f es la aplicación definida en el Lema 2.2, por lo tanto f está bien definida. Recíprocamente si $(\tilde{x},U)$ y $(\tilde{\tilde{x}},U)$ son dos cartas con $\tilde{x}(U) = \tilde{\tilde{x}}(U) = \mathbb{R}^m$ tales que $\tilde{x}(p) = \tilde{\tilde{x}}(p) = x(p)$ y

$$B_j^i(p) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\right)_p = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{\tilde{x}}^j}\right)_p = \tilde{B}_j^i(p)$$

entonces:

$$\psi_p^k(\tilde{x}) = \psi_p^k(\tilde{\tilde{x}})$$

y por lo tanto la aplicación g definida en el Lema 2.2 $(g=f^{-1})$ también resulta bien definida.

Por último remarcamos que efectivamente el hecho de haber considerado c=1 no hace perder generalidad, ya que si $c \neq 1$ habría que repetir el mismo razonamiento anterior considerando $b_{(1)j_1\dots j_{s_1}}^{i_1\dots i_{r_1}}, \dots,$ $b_{(c)j_1\dots j_{s_c}}^{i_1\dots i_{r_c}}$ como las componentes de c tensores de tipo $(r_\ell, s_\ell)$ $(1 \leq \ell \leq c)$ y calculando formalmente los cambios de coordenadas de una carta $(x,U)$ a otra $(\tilde{x},U)$ de dichos tensores y sus derivadas hasta el orden k.

Schifini   Recalde

## Referencias


1. Aldersley, S.J. - Dimensional Analysis in Relativistic Gravitational theories, Phys.Rev.,D, 15, n°12, 1977.

2. Dobarro, F. - Análisis dimensional de Lagrangianos vecto-tenso riales, Impresiones Previas FCEN, n°51, 1982.

3. Horndeski,G.W. - Gauge invariance and charge conservation, Tensor, N.S., 32, 1978.

4. Horndeski,G.W. y Lovelock,D. - Scalar- Tensor field theories, Tensor, N.S., 24, 1972.

5. Kerrighan, B. - Arbitrary tensor concomitants of a bivector and a metric in a space-time manifold, Gen.Rel.Grav., 13, n°1, 1981.

6. Lovelock, D. - The Euler-Lagrange expression and degenerate Lagrange densities, J. Australian Math. Soc., 14, n°4, 1972.

7. Lovelock, D. - The uniqueness of the Einstein-Maxwell field equations, Gen.Rel.Grav., 5, n°4, 1974.

8. Lovelock, D. - Vector-Tensor field theories and the Einstein-Maxwell field equations, Proc.Royal Soc.London A 341,1974.

9. Noriega,R.J. - Sobre algunas identidades de invariancia y densidades Lagrangianas degeneradas, Rev.Unión Mat. Arg., 27, 1976.

10. Noriega,R.J. - La ecuación de Klein-Gordon y el operador de Euler-Lagrange, Math.Not., Año XXIX, 1981/82.

11. Noriega, R.J. - Tensorial concomitants of a metric and a bivector, Math.Not.,Año XXIX, 1981/82.

12. Noriega, R.J. y Schifini, C.G. - Tensorial concomitants of a metric and a covector, Impresiones Previas FCEN, n°52, 1982.

13. Noriega, R.J. y Schifini, C.G. - On scalar concomitance operators, Rev. Unión Mat.Arg., 30, n°s 3 y 4, 1982/83.

14. Noriega, R.J. y Schifini, C.G. - Scalar density concomitants of a metric and a bivector (por aparecer en Gen.Rel. Grav., 1984).

15. Rund, H. - Variational problems involving combined tensor fields, Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg, 29, 1966.

16. Rund, H. - The Hamilton-Jacobi theory, its role in Mathematics and Physics, Krieger, N.York, 1973.

17. Schifini, C.G. - Tensorial concomitance operators (por aparecer).